

Graph and Degree		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 7 วิทยาศาสตร์	วิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<u>Learning outcomes</u> Graph given vertex , edge and find degree circuit path cycle that any graph is Eulerian Graph		
<u>Intended destination</u> Write and find degree of graph.		
Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwon		

Name Class.No.....
 %%%%%%%%%%


Graph and Degree

Definition 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า

จุดยอด u และจุดยอด v เป็นจุดยอดประชิด(adjacent vertices)ก็ต่อ เมื่อมีเส้นเชื่อมใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเรียกจุดยอด u และ v ว่าจุดปลายของ เส้น uv

ถ้า $e=uv$ เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่า จุดยอด u และ v ตกกระทบกับเส้น e หรือเส้นเชื่อม e ของกราฟเกิดกับ(incident)กับ จุดยอด u และจุดยอด v

Definition 3

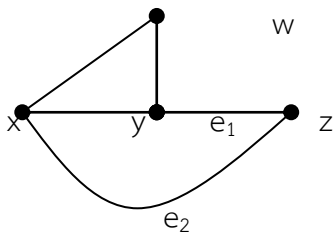
- 1.เส้นเชื่อมที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน เราเรียกว่า วงวน(loop) ● 
- 2.เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดคู่เดียวกัน เราเรียกว่าเส้นเชื่อมขนาน (Parallel edges)

3.กราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน เราเรียกว่า กราฟปกติ(Simple graph)

4.กราฟที่ยอมให้มีเส้นเชื่อมขนานอยู่ในกราฟได้ เรียกว่า กราฟหลายชั้น

Example 1

1)กำหนดกราฟของ S ดังรูป



1)จะได้ว่า $V(S)$ คือจุดยอดในกราฟ S คือ w, x, y และ z
 $E(S)$ คือเส้นเชื่อมในกราฟ S คือ wx, wy, xy, xz และ yz

2)จะเห็นว่าเส้นเชื่อมจุด x และ z มี 2 เส้น เราเรียกเส้นตั้งแต่ 2 เส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดเดียวกันว่า เส้นเชื่อมขนาน และเรียก กราฟที่ยอมให้มีเส้นเชื่อมขนานอยู่ในกราฟได้ว่า กราฟหลายชั้นและเรียกเส้นเชื่อมจุดคู่เดียวกันว่าเส้นเชื่อมขนาน

-จะได้จุดยอด p ประชิดกับจุดยอด q, r, t, u

และจุดยอด p ตกกระทบกับเส้นเชื่อม pq, pr, pt, pu

-จุดยอด u ประชิดกับจุดยอด p, r, s, t

และจุดยอด u ตกกระทบกับเส้นเชื่อม up, ur, us, ut

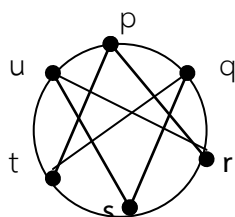
-จุด....

จุด...

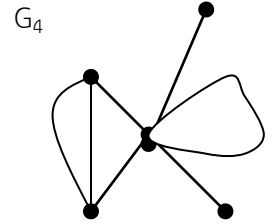
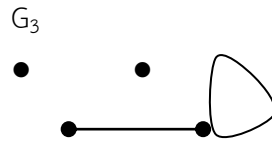
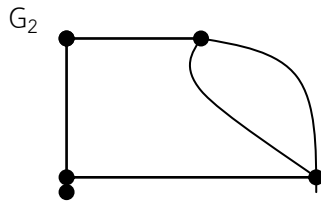
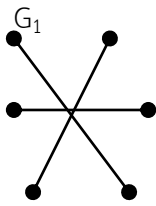
จุด...

จุด...

Example 2 กำหนดกราฟ ดังรูป

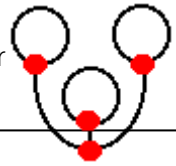


Example 3 กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3, G_4 ดังรูป



1. กราฟปกติคือ.....
2. กราฟใดมีเส้นเชื่อมขนาน...
3. กราฟใดมีวงวน.....
4. กราฟใดมีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน.....

Degree The degree (or valence) of a vertex is the number of edge ends at that vertex For example, in this graph all of the vertices have degree three

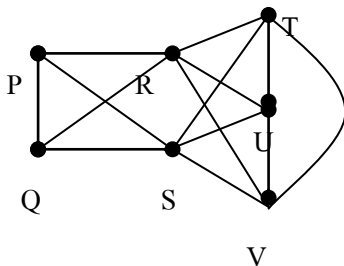


Definition ให้ u เป็นจุดยอดในกราฟ G

Degree of u on G คือจำนวนครั้งของเส้นเชื่อมทั้งหมดที่เกิดกับกับจุดยอด u เขียนแทนด้วย $\deg u$

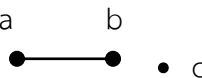
เรากล่าววว่า u เป็นจุดยอดคู่ (even vertex) ก็ต่อเมื่อ $\deg u$ เป็นจำนวนคู่ (even number)
 u เป็นจุดยอดคี่ (odd vertex) ก็ต่อเมื่อ $\deg u$ เป็นจำนวนคี่ (odd number)
 u เป็นจุดเอกเทศ ก็ต่อเมื่อ $\deg u$ เป็นศูนย์

Example 4 กำหนดกราฟดังรูป



จะได้ $\deg P = 3$ ดังนั้น p เป็น odd vertex
 $\deg Q = 3$ ดังนั้น Q เป็น odd vertex
 $\deg R = 5$ ดังนั้น R เป็น odd vertex
 $\deg S = 5$ ดังนั้น S เป็น odd vertex
 $\deg T = 4$ ดังนั้น T เป็น even vertex
 $\deg U = 4$ ดังนั้น U เป็น even vertex
 $\deg V = 4$ ดังนั้น V เป็น even vertex

Example 5 กำหนดกราฟดังรูป



จะได้ $\deg a = \dots$ ดังนั้น a เป็นจุดยอด.....
 จะได้ $\deg b = \dots$ ดังนั้น b เป็นจุดยอด.....
 จะได้ $\deg c = \dots$ ดังนั้น c เป็นจุด.....

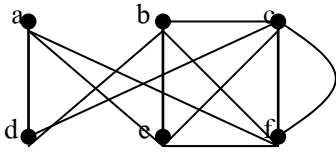
Theorem 1 ผลรวมของดีกรีหรือระดับชั้นของจุดในกราฟ G เท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นใน G เมื่อ v แทนจุด หรือ ให้ $G = (V(G), E(G))$ แทนกราฟ โดย $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = q$ จะได้

$$\sum_{i=1}^p \deg(v) = 2 |E(G)|$$

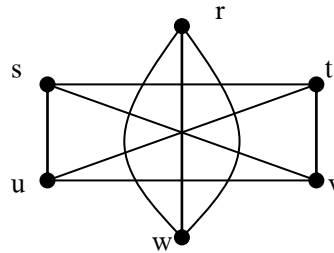
นั่นคือ ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ
บทแทรก ในกราฟ G ใดๆ จะมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่

Example 5 จงพิจารณากกราฟต่อไปนี้

ก)



ข)



ก) odd vertex is..... รวม.....จุด ข) odd vertex is.....รวม...จุด

Example 6 ถ้ากราฟ G มีเส้น 20 เส้นและระดับชั้น(ดีกรี)ของจุดทุกๆจุดในG เป็น 4 จงหาว่ากราฟG มีจำนวนจุดเท่ากับเท่าไร

solution จากทฤษฎีบทที่ 1

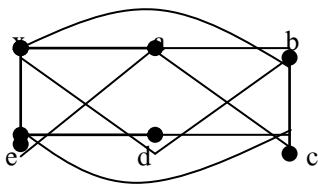
$$\sum_{i=1}^p \deg(v) = 2 |E(G)|$$

แบบฝึกหัด

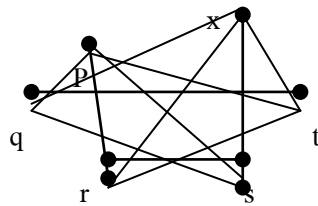
ตอนที่ 1

1. จากกราฟต่อไปนี้จงหาดีกรีของจุดทั้งหมด รวมทั้งระบุด้วยว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่

ก)



ข)



2) กราฟต่อไปนี้จะมีจุดยอดกี่จุด เมื่อกำหนด

ก) มีเส้นเชื่อม 40 เส้น และดีกรีของจุดทุกๆจุดเป็น 2

ข) มีเส้นเชื่อม 13 เส้น มีจุดที่มีดีกรี 2 อยู่ 4 จุด นอกนั้นดีกรี 3

3) กราฟที่มีจุดยอด 6 จุด โดยมีดีกรีเป็น 1, 2, 3, 3, 4, 5 จะมีเส้นเชื่อมในกราฟอยู่กี่เส้น

4) ถ้ากราฟG มีเส้นเชื่อม 30 เส้น และมีจุดยอดที่มีดีกรี 2 อยู่ 12 จุด นอกนั้นเป็นดีกรี 3 จงหาว่ากราฟG

มีจำนวนของจุดเท่าไร (วิธีทำ $\sum_{i=1}^p \deg(v) = 2 |E(G)|$)

5) กราฟจะมี 8 จุด โดยมีดีกรีเป็น 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 8 ได้หรือไม่ ถ้าได้ให้วาดกราฟดังกล่าว ถ้าไม่ได้บอกเหตุผลประกอบ

ตอนที่ 2

1. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่งผู้ที่มาถึงงานคนแรกได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพ (มีคนเดียว) และคนที่มาถึงงานเป็นคนที่สองได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพและผู้ที่มาถึงงานคนแรก ผู้มาถึงงานคนที่สามได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพและผู้ที่มาถึงงานคนแรกและคนที่สอง ในทำนองเดียวกันผู้ที่มาถึงงานคนต่อๆมาก็จะจับมือทักทายกับเจ้าภาพและกับผู้ที่มาถึงงานก่อนเขาทั้งหมด ถ้าในงานเลี้ยงนี้มีผู้มาร่วมงาน 8 คน

1) จงแปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟ

2) จงหาจำนวนครั้งทั้งหมดที่มีการจับมือทักทายกัน

2. กำหนดให้กราฟมีดีกรีของจุดยอดต่างๆดังนี้ 1, 1, 4 และ 6 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

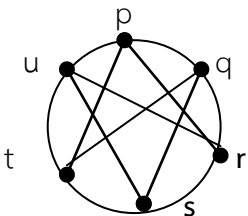
3. จงพิจารณาว่ามีกราฟที่มีจุดยอด 7 จุดและดีกรี 5, 4, 2, 2, 1 และ 1 ได้หรือไม่

4. จงเขียนแผนภาพของกราฟ G ที่มีจุดยอด 5 จุด คือ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 และ $\deg v_1 = 3$ v_2 เป็นจุดยอดคือ $\deg v_3 = 2$ และ v_4 และ v_5 เป็นจุดยอดประชิด

5. จงหาจำนวนจุดยอดกราฟที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของกราฟที่มีเส้นเชื่อม 35 เส้นและจุดยอดทุกจุดมีดีกรีอย่างน้อย 3

Answer Guidance document 21

ตัวอย่างที่ 2
กำหนดกราฟ ดังรูป



จะได้ p ประชิดกับจุด q,r,t, u และตกกระทบบกับเส้น pq , pr , pt pu
จุด u ประชิดกับจุด p , r , s , t และตกกระทบบกับเส้น up , ur , us , ut
จุด..(t ประชิดกับจุด p , q , u , s และตกกระทบบกับเส้น tp , tq , tu , ts)
จุด..(s ประชิดกับจุด u , q , t , r และตกกระทบบกับเส้น su , sq s t , sr)
จุด...(r ประชิดกับจุด u , q , p , s และตกกระทบบกับเส้น ru , rq , rp , rs)
จุด...(q ประชิดกับจุด t , s , p , r และตกกระทบบกับ เส้น qt , qs , qp , qr)

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3, G_4 ดังรูป

1.กราฟเชิงเดียวคือ..... G_1

2.กราฟใดมีเส้นเชื่อมขนาน... G_2

3.กราฟใดมีวงวน..... G_3

4.กราฟใดมีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน..... G_4

ตัวอย่างที่ 5

จะได้ $\deg a = \dots(1)\dots$ ดังนั้น a เป็นจุดยอด.....(คี่)....

จะได้ $\deg b = \dots(1)\dots$ ดังนั้น b เป็นจุดยอด.....(คี่)....

จะได้ $\deg c = \dots(0)\dots$ ดังนั้น c เป็นจุด.....(เอกเทศ).....

ตัวอย่างที่ 6

ก)จุดที่เป็นจุดยอดคี่คือ.(a,c,d,f) รวม...(4).จุด ข) จุดที่เป็นจุดยอดคี่คือ.(r,s,t,u,v,w).รวม.(6).จุด

ตัวอย่างที่ 7 จำนวน 10 จุด

เฉลยแบบฝึกหัดจากเอกสารหมายเลข 21 (กราฟต่างๆและดีกรี)

ตอนที่ 1

1. ก. $\deg x = \deg a = \deg c = \deg e = 4$ จุดทั้งหมดเป็นจุดคู่

ข. $\deg x = \deg p = \deg q = \deg t = \deg r = \deg s = 4$ จุดทั้งหมดเป็นจุดคู่

2. ก. 40 จุด ข. 10 จุด

3. 9 เส้น

4. 24 จุด

5.ไม่ได้เพราะมีจุดคี่ 3 จุด

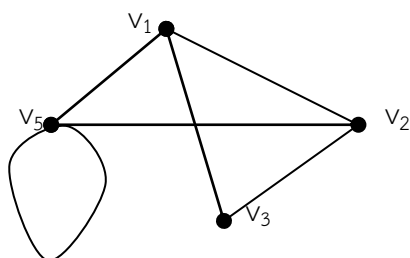
ตอนที่ 2

1. 1) มี 8 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 7 2) $7 \times 8 = 2n, n=28$

2. $1+1+4+4+6=2n, n=8$ ตอบ 8 เส้น

3. ไม่มีกราฟ

4.



5. 23

v_4 ●