

| Connected graph Weighted graph and Shortest path | | |
|--|-----------------------|---|
| กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ | สาระที่ 7 วิทยาศาสตร์ | วิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 |
| <u>Learning outcomes</u> Graph given vertex , edge and find degree circuit path cycle that any graph is Eulerian Graph | | |
| <u>Intended destination.</u> Apply the knowledge of connected graph weighted graph and shortest path to solve problem. | | |
| Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan | | |

Name Class.No.....

%%%%%%%%%

กราฟเชื่อมโยง กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด

Definition 1 กราฟG เรียกว่ากราฟเชื่อมโยง(connected graph)ก็ต่อเมื่อจุดยอด $u \ v$

สำหรับแต่ละ 2 จุด u และ v ที่ต่างกันในกราฟGจะมีทางเดิน $u-v$ (หรือกราฟไม่ขาดตอน เมื่อจุด 2 จุดใดๆในกราฟG มีวิถีเชื่อม 2จุดดังกล่าว) นั่นคือ ถ้ามีวิถีระหว่างจุด 2 จุดใดๆแล้วกราฟGเป็นกราฟเชื่อมโยง

กราฟที่ไม่ใช่กราฟเชื่อมโยงจะเรียกว่ากราฟไม่เชื่อมโยง(หรือกราฟขาดตอน เมื่อมีอย่างน้อย 2 จุดใน G ไม่มีวิถีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว) นั่นคือ ถ้าไม่มีวิถีระหว่างจุด 2 จุดใดๆแล้วกราฟGเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

Connected Graphs A graph is called **connected** if given any two vertices P_i, P_j there is a path from P_i to P_j .

Definition 2 จุดตัด(cut vertex)ให้ กราฟG เป็นกราฟเชื่อมโยงและ v เป็นจุดในกราฟG เรียกจุด v ว่าจุดตัดถ้ากราฟG-v กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

cut vertex

A cut vertex is a vertex that if removed (along with all edges incident with it) produces a graph with more connected components than the original graph.

Definition 3 เส้นตัด(cut edge) คือเส้นซึ่งถ้ากำจัดออกไปแล้ว จะทำให้กราฟที่เกิดจากการกำจัดเส้นนั้นออกไปแล้วกลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

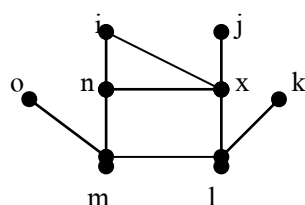
Cut edge :

The set of all edges having one endvertex in some proper vertex subset S and another endvertex in $V(G)\setminus S$. Edges of K_3 form a disconnecting set but not an edge cut. Any two edges of K_3 form a minimal disconnecting set as well as an edge cut. An edge cut is necessarily a disconnecting set; and a minimal disconnecting set of a nonempty graph is necessarily an edge cut.

Example 1

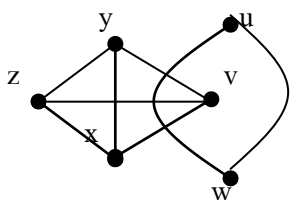
1)ข้อใดเป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟไม่เชื่อมโยง

ก)



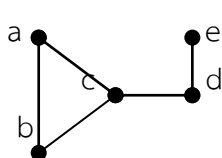
เป็นกราฟเชื่อมโยง(กราฟไม่ขาดตอน) เนื่องจาก 2 จุด ใดๆ ใน กราฟมีวิถีเชื่อม 2 จุด เช่น วิถี $o-k$ คือ o,m,l,k

ข)



เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เนื่องจากจุด และจุด ..
ไม่มีวิถีเชื่อมโยงไปยังจุด

2) จงหาเส้นตัด จุดตัดในกราฟที่ทำกราฟนี้เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง



นั่นคือ เส้น cd และ.....เป็นเส้นตัด
และมีจุดตัด c,..... เนื่องจากกราฟ G-.... และ G-....
กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

Definition 4 กราฟถ่วงน้ำหนัก(weighted graph) คือกราฟGที่ทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก ค่าน้ำหนัก(weight) ของเส้นในกราฟG คือจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้น e เขียนแทนด้วย $w(e)$
weighted graph

A graph that associates a label (**weight**) with every edge in the graph. Weights are usually real numbers. They may be restricted to rational numbers or integers. Certain algorithms require further restrictions on weights; for instance, the Dijkstra algorithm works properly only for positive weights.

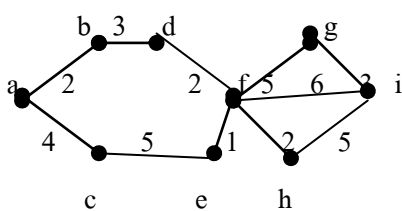
Definition 5 ความยาวของวิถีในกราฟถ่วงน้ำหนักคือผลรวมของน้ำหนักของเส้นทั้งหมดในวิถีนั้น

Definition 6 ให้ G_w เป็นกราฟเชื่อมโยง วิถีที่สั้นที่สุด(Shortest path)จากจุด a ถึงจุดz ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือวิถีa-zที่มีผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นทุกเส้นในวิถีa-zมีค่าน้อยที่สุด เขียนแทนด้วย $d(a,z)$

วิถีที่สั้นที่สุด คือการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใดๆที่สั้นที่สุดในกราฟ

Shortest path: The problem of finding the shortest *path* in a *graph* from one *vertex* to another. "Shortest" may be least number of *edges*, least total weight

Example 2 กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จะได้ 1) กราฟ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก
น้ำหนักของเส้น ab คือ 2

2) ความยาวของวิถี a-i ที่เป็นไปได้ทั้งหมด มีลำดับดังนี้

a,b,d,f,i มีความยาว $2+3+2+6 = 13$

a,b,d,f,g,i มีความยาว....

a,b,d,f,h,i มีความยาว....

a,c,e,f,i มีความยาว....

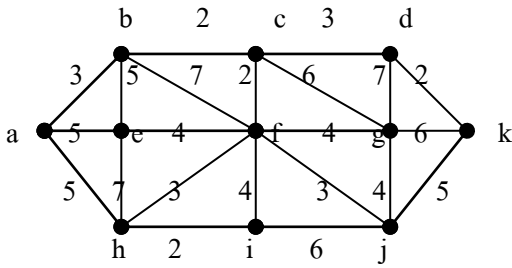
a,c,e,f,g,i มีความยาว....

a,c,e,f,h,i มีความยาว....

3) วิถี a-i ที่สั้นที่สุดคือ.....หรือ $d(a,i) = \dots\dots\dots$

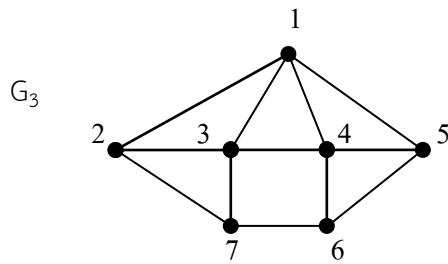
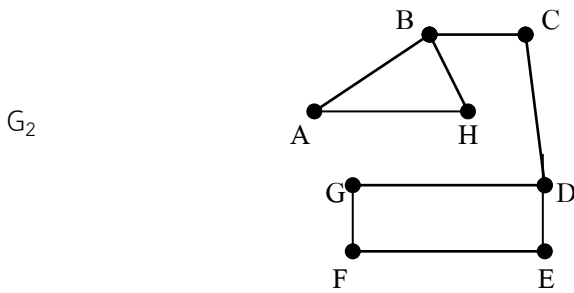
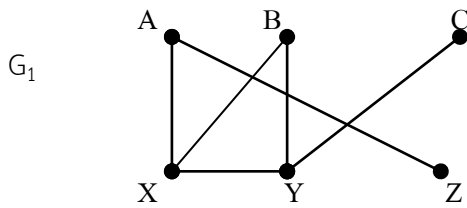
แบบฝึกหัด

1. จากกราฟถ่วงน้ำหนักที่เชื่อมโยง(ไม่ขาดตอน) จงหาวิถีที่สั้นที่สุดระหว่างคู่จุดต่อไปนี้

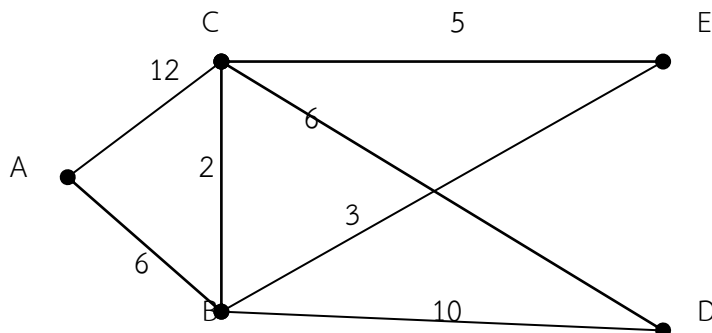


- ก) d(a,f)
- ข) d(a,k)
- ค) d(h,d)

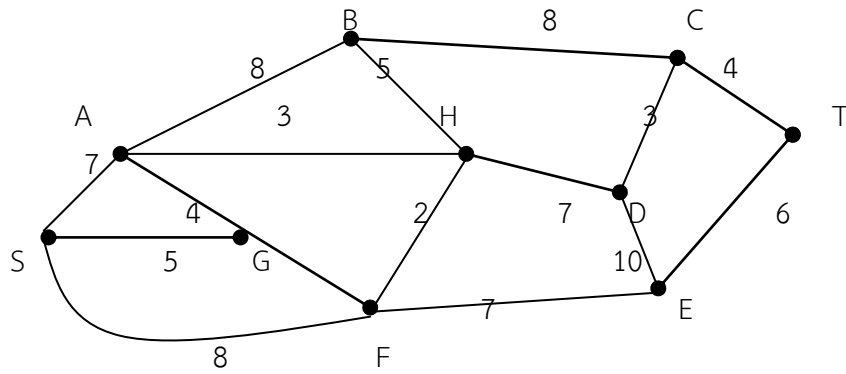
2. กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังรูปต่อไปนี้ จงหาจุดตัดและเส้นตัดของกราฟ



3. สมมติคาบที่ 1 นักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ตึก A คาบที่ 2 เรียนวิชาเคมีที่ตึก D นักเรียนจะเลือกเส้นทางใดที่ไปเรียนวิชาเคมีที่ตึก D ได้เร็วที่สุด กำหนดแผนผังแสดงเส้นทางเชื่อมระหว่างตึกทั้ง 5 ตึกในโรงเรียนดังรูป (ระยะทางระหว่างตึกมีหน่วยเป็นเมตร)

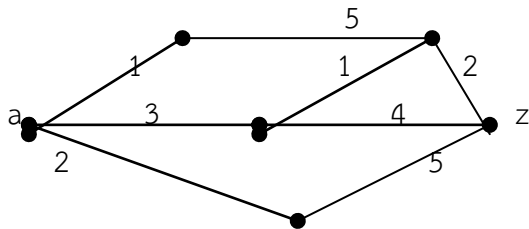


4. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางการบินจากเมืองหนึ่ง ไปยังอีกเมืองหนึ่ง โดยให้จุดแทนเมือง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทนเส้นทางการบินระหว่างสองเมืองและน้ำหนักของเส้น แทนเวลาที่ใช้บิน (ชั่วโมง) จงหาเส้นทางการบินจากเมือง S ไป เมือง T ที่ใช้เวลาในการบินน้อยที่สุด

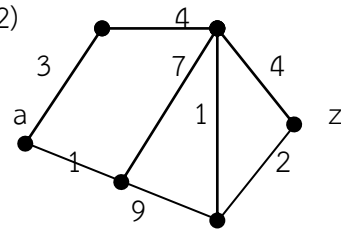


5. จงหาวิถี a-z ที่สั้นที่สุดของกราฟถ่วงน้ำหนักต่อไปนี้

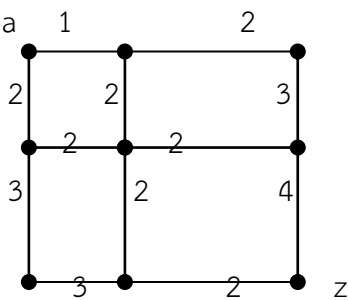
1)



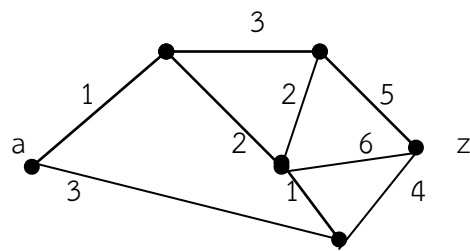
2)



3)



4)

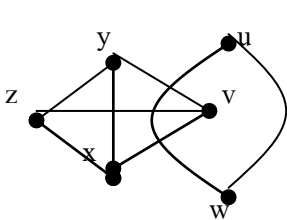


เฉลยเอกสารหมายเลข 23

ตัวอย่างที่ 1

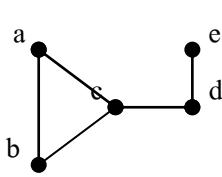
1. ข้อใดเป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟไม่เชื่อมโยง(กราฟไม่ขาดตอน กราฟขาดตอน)

ข)



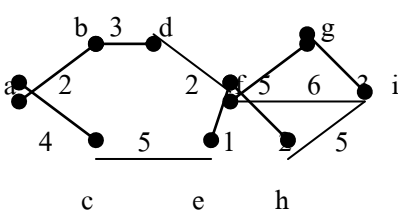
เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เนื่องจากจุด ... (u). และจุด .. (w) ไม่มีวิถีเชื่อมโยงไปยังจุด ... (v,x,y,z).....

2. จงหาเส้นตัดจุดตัดในกราฟที่ทำกราฟนี้เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง



นั่นคือ เส้น cd และ... (de).....เป็นเส้นตัด และมีจุดตัด c,... (d).. เนื่องจากกราฟ G- (c). และ G-(d).. กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟ G ต่อเป็น



จะได้ 1. กราฟ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก น้ำหนักของเส้น ab คือ 2 , bd = 3,

2. ทิวเขามะพร้าวของเมือง a-ทิวเขามะพร้าวทั้งหมด มีลำดับดังนี้

- a,b,d,f,i มีความยาว $2+3+2+6 = 13$
- a,b,d,f,g,i มีความยาว... $(2+3+2+5+3=15)$
- a,b,d,f,h,i มีความยาว... $(2+3+2+2+5=14)$
- a,c,e,f,i มีความยาว..... $(4+5+1+6=16)$
- a,c,e,f,g,i มีความยาว..... $(4+5+1+5+3=18)$
- a,c,e,f,h,i มีความยาว..... $(4+5+1+2+5=17)$

3) วิถี a-i ที่สั้นที่สุดคือ... (13)... หรือ $d(a,i) = \dots (13) \dots$

เฉลยแบบฝึกหัดจากเอกสารหมายเลข 23 (กราฟเชื่อมโยง/ถ่วงน้ำหนัก)

ตอนที่ 1

1) ก. $a,b,c,f = 3+2+2=7$

ข. $a,b,c,d,k = 3+2+3+2=10$

ค. $h,f,c,d = 3+2+3 = 8$

2) กราฟ G_1 จุดตัด A,X,Y เส้นตัด AX,AZ,CY

กราฟ G_2 จุดตัด b,c,d เส้นตัด be,cd

กราฟ G_3 จุดตัด ไม่มี เส้นตัด ไม่มี

3) $A,B,C,D = 6+2+6=14$

4) $S,F,E,T = 8+7+6=21$

5) 1.1 6 1.2 10 1.3 7 1.4 7
