

Application of the Eulerian graph		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 7 วิทยาการคำนวณ	วิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<u>Learning outcomes</u> Graph given vertex , edge and find degree circuit path cycle that any graph is Eulerian Graph.		
<u>Intended destination.</u> Apply Eulerian graph to solve problem.		
Instructor. Mrs. Malaiporn uasuan		

Name ..... Class. ....No.....

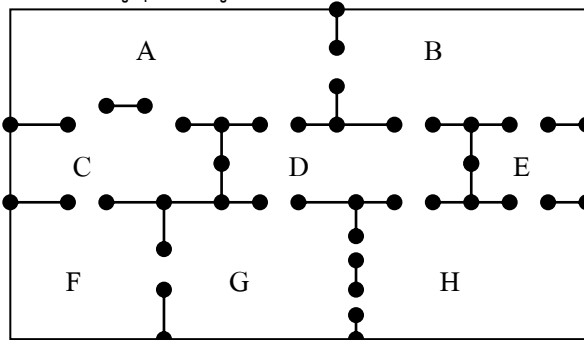
%%%%%%%%%

Eulerian graph (2)

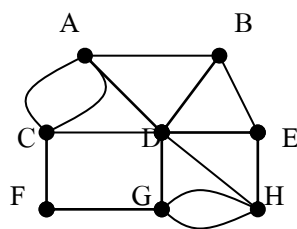
1) กราฟอื่นที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟออยเลอร์จะมีจุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคี่ ดังนั้น ถ้ากราฟที่เรากำลังพิจารณาเป็นกราฟเชื่อมโยงแต่มีจุดยอดคี่อยู่ ดังนั้นเราจะต้องทำให้จุดยอดคี่เหล่านี้เป็นจุดยอดคู่โดยหาวิธีเชื่อมจุดยอดคี่ 2 จุดใดๆเพื่อเพิ่มดีกรีอีก 1 ดีกรี ซึ่งจะทำให้จุดเหล่านี้เป็นจุดยอดคู่

Definition 2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง(connected graph)ใดๆทางเดินออยเลอร์คือ ทางเดินปิดที่ผ่านเส้นทุกเส้นในG

Example 1 แพลนห้างร้านสรรพสินค้าชั้นล่างแห่งหนึ่ง แสดงดังรูป จงหาว่าถ้าจะเดินดูของทุกถ้อย โดยผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาข้างนอกเหมือนเดินได้หรือไม่

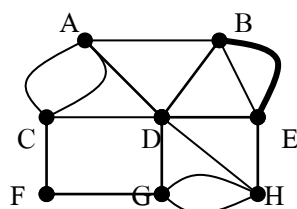


solution จากแบบแปลน เราสามารถจำลองเป็นกราฟ โดยให้ จุด แทน ถ้อย และ เส้นแทน ประตู ได้ดังนี้



ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เพราะ จุด B และจุด E เป็นจุดคี่ จึงไม่สามารถหาออยเลอร์และไม่สามารถหาทางเดินดังกล่าวได้

แต่ถ้าเราต้องการเดินดูครบทุกถ้อย โดยยอมให้ผ่านบางประตูได้มากกว่า 1 ครั้ง แต่จำนวนครั้งในการเดินผ่านประตูซ้ำน้อยที่สุด ทำได้ดังนี้



กราฟใหม่นี้จะเป็นกราฟออยเลอร์ เพราะจุดทุกจุดในกราฟใหม่เป็นจุดคู่ทั้งหมด ดังนั้น เราจะได้ทางเดินออยเลอร์ตามที่ต้องการคือ ลำดับ..... แสดงได้ดังรูป

และความยาวของการเดินดูครบทุกล๊อค  
 และประตูขั้วน้อยที่สุดคือ.....

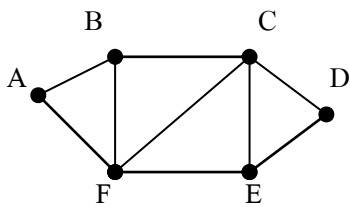
2) ถ้ากราฟที่เป็นแบบจำลองไม่ใช่กราฟออยเลอร์แต่เราต้องการจะหาทางเดินออยเลอร์ในกราฟดังกล่าว เราสามารถหาทางเดินดังกล่าวได้โดย สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ แต่ถ้ากราฟที่เราพิจารณา มี

- จุดคี่ 2 จุดไม่มีเส้นเชื่อมเดิมอยู่
- จุดคี่มากกว่า 2 จุดขึ้นไป อาจเป็น 4,6,8.....(จากทฤษฎีบท จุดยอดคี่มีเป็นจำนวนคู่)

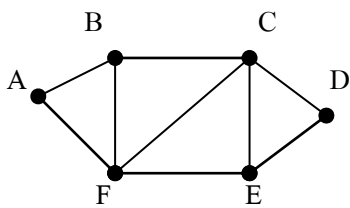
การหาทางเดินของกราฟลักษณะดังกล่าวจะยุ่งยากมากขึ้น แต่ก็ใช้แนวความคิดที่ว่า หาเส้นเชื่อมต่อยอดคี่ทั้งหมดที่อยู่ในกราฟทำให้เป็นจุดยอดคู่โดยใช้เส้นเชื่อมให้น้อยที่สุด ซึ่งก็คือ ทาวิธีที่สั้นที่สุด

3) ความยาวของวงจรรอออยเลอร์จากกราฟใหม่เท่ากับผลรวมของจำนวนเส้นเชื่อมเดิมกับจำนวนเส้นเชื่อมใหม่ที่เพิ่มเข้ามา

Example 2 กำหนดกราฟ P ดังรูปจงหาทางเดินออยเลอร์และความยาวของทางเดินออยเลอร์



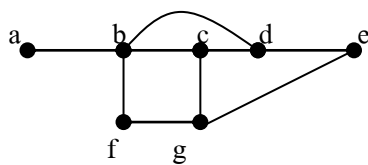
จากกราฟ P มีจุดยอดคี่คือจุด.....จำนวน.....จุด  
 ดังนั้นเราหาวิธีที่สั้นที่สุดเชื่อมระหว่างจุด....จุดนี้  
 จะได้วิธี.....ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ B,C,E หรือ.....  
 สร้างกราฟใหม่ที่เป็นกราฟออยเลอร์ได้ดังนี้



ดังนั้นทางเดินออยเลอร์คือลำดับ.....  
 แสดงได้ดังรูป

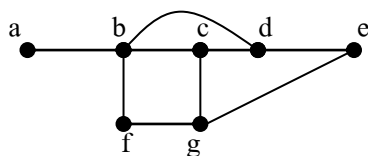
ความยาวของทางเดินคือ.....

Example 3 กำหนดกราฟ Y จงหาความยาวทางเดินออยเลอร์



จุดยอดคี่ใน Y คือ..... จับคู่จุดยอดคี่เหล่านี้และหาวิธีที่สั้นที่สุดเชื่อมคู่ของจุดยอดคี่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังนี้

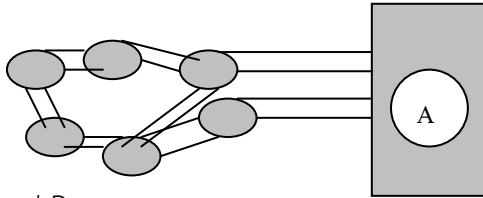
ความยาวที่สั้นที่สุดของวิธีที่เพิ่มเข้ามาเท่ากับผลบวกของความยาวที่สั้นที่สุดของวิธี a-g กับวิธี c-d =.....  
 ให้ความยาวของวิธีที่เพิ่มเข้ามาสั้นที่สุด ทำให้สร้างกราฟใหม่เป็นกราฟออยเลอร์ได้ดังนี้



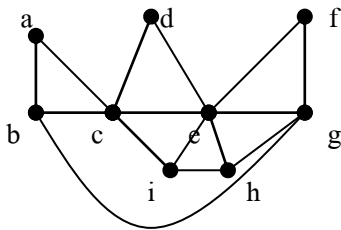
กราฟใหม่นี้มีความยาวของทางเดินออยเลอร์เท่ากับ  
 จำนวนเส้นเชื่อมเดิม+จำนวนเส้นเชื่อมใหม่ที่เพิ่มเข้ามา=...  
 .....

แบบฝึกหัด

1) จากรูปเป็นแผนที่เกาะต่างๆ และกำหนดให้เส้นเป็นเส้นทางเดินเรือเชื่อมระหว่างเกาะเหล่านี้ จงหาว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่จะหาเส้นทางเดินเรือจากฝั่ง A ไปยังเกาะทุกเกาะและเดินทางตามเส้นทาง การเดินเรือทุกเส้นเพียงครั้งเดียวหรือซ้ำเส้นทางเดินให้น้อยที่สุดแล้วกลับมายังฝั่ง A เหมือนเดิมพร้อมหาความ ยาวทางเดิน



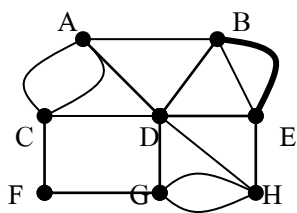
2) กำหนดกราฟ R จงหา



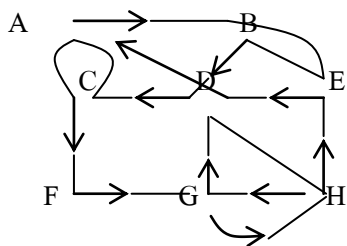
- 1) ความยาวของวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดยอดที่ตั้งกล่าว
- 2) ความยาวของทางเดินออยเลอร์ที่หาได้

ตัวอย่างที่ 1

การเดินทางผ่านประตูอย่างน้อยที่สุด ทำได้ดังนี้

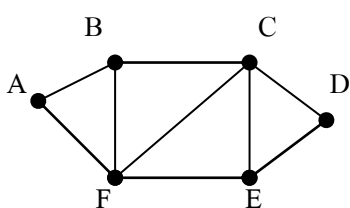


กราฟใหม่นี้จะเป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ  
จุดทุกจุดในกราฟใหม่เป็นจุดคู่ทั้งหมด  
ดังนั้น เราจะได้ทางเดินออยเลอร์ตามที่ต้องการคือ

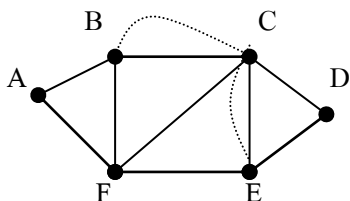


ทางเดินที่ต้องการคือ  
A,B,E,B,D,C,A,C,F,G,H,G,D,H,E,D,A  
และความยาวของการเดินดูครบทุกลูป  
และประตูอย่างน้อยที่สุดคือ.....(16).....

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟ P ดังรูปจงหาทางเดินออยเลอร์และความยาวของทางเดินออยเลอร์



จากกราฟ P มีจุดยอดคี่คือจุด...(B,E)..จำนวน...(2)..จุด  
ดังนั้นเราหาวิธีที่สั้นที่สุดเชื่อมระหว่างจุด...(2)..จุดนี้  
จะได้วิธี...(BE).....ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ B,C,E หรือ...(B,E,F)..  
สร้างกราฟใหม่ที่เป็นกราฟออยเลอร์ได้ดังนี้



ดังนั้นทางเดินออยเลอร์คือลำดับ....

(A,F,B,C,D,E,C,E,F,C,B,A)....

แสดงได้ดังรูป

ความยาวของทางเดินคือ.....(11).....

ตัวอย่างที่ 3

จุดคี่ใน Y คือ a,c,d,g

กรณีที่ 1 วิธี a-c และ วิธี d-g = 2+2=4

กรณีที่ 2 วิธี a-d และ วิธี c-g = 2+1=3

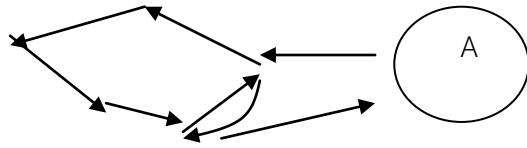
กรณีที่ 3 วิธี a-g และ วิธี c-d = 3+1=4

การจับคู่ในกรณีที่ ... (2) .. ทำให้ความยาวของวิธีที่เพิ่มเข้ามาสั้นที่สุด

กราฟใหม่นี้มีความยาวของทางเดินออยเลอร์เท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมเดิม + จำนวนเส้นเชื่อมใหม่ที่เพิ่มเข้ามา  
9+3=12

เฉลยแบบฝึกหัดจากเอกสารหมายเลข 25(ประยุกต์กราฟออยเลอร์)

1) 9



- 2) ก. 1.( b,c) ,(i,h)      2. (b,i) , (c,h)      3. (b,h) , (c,i)  
ข. 2  
ค. 17