

Tree and Apply tree		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 7 วิทยาศาสตร์	วิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<u>Learning outcomes</u> Application of the graph to solve the problem		
<u>Intended destination</u> Apply the knowledge of Subgraph , Tree, spanning tree and minimal spanning tree to solve problem		
Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan		

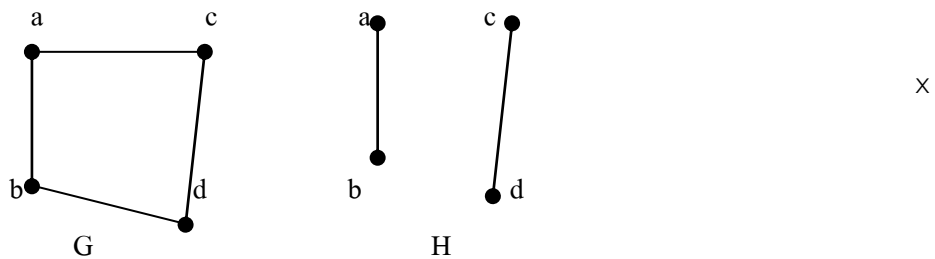
NameClass.No.....

%%%

1) กราฟย่อยหรือสับกราฟ(subgraph)ของกราฟ

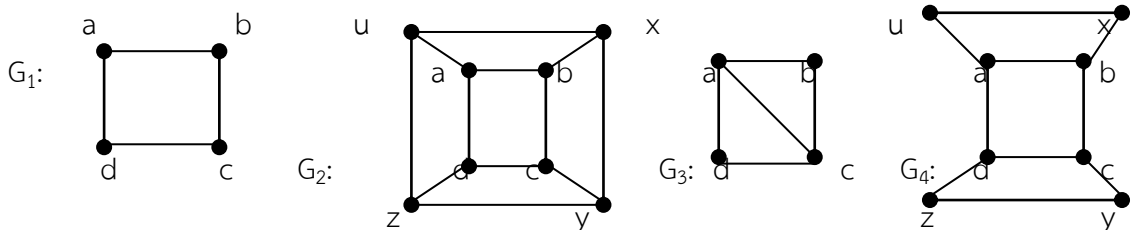
Definition ให้ $H = (V(H), E(H))$ และ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟใดๆ

กราฟย่อยหรือสับกราฟของ G คือกราฟที่มีจุดยอดและเส้นเชื่อมของ G กล่าวคือ กราฟ H เป็นกราฟย่อยหรือสับกราฟของกราฟ G ถ้า $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$



Subgraph Of a graph G is a graph whose vertex and edge sets are subsets of those of G . In the other direction, a **supergraph** of a graph G is a graph that contains G as a subgraph. We say a graph G **contains** another graph H if some subgraph of G is H or is isomorphic to H (depending on the needs of the situation).

Example1 กำหนด G_1, G_2, G_3, G_4 ดังรูป

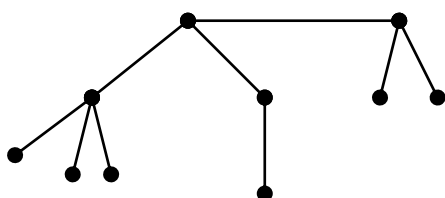


ตอบ 1) G_1 เป็นสับกราฟของ..... 2) G_3 ไม่เป็นสับกราฟของ.....

2 ต้นไม้ (Tree)

Definition ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว เรากล่าวว่า G เป็นต้นไม้ (Tree) เมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

นั่นคือ ต้นไม้ คือกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร Tree: A connected graph with no loops ,cycle



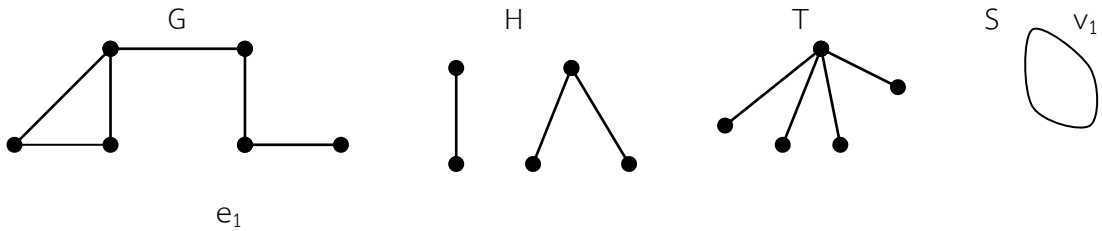
กราฟต้นไม้

ข้อสังเกต ต้นไม้มี n จุด จะมี $n-1$ เส้น

Theorem (ลักษณะเฉพาะของต้นไม้)

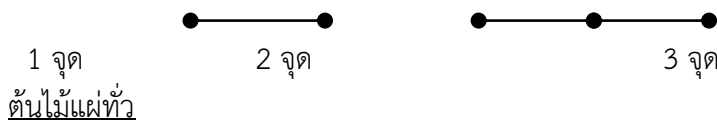
- 1.1 ถ้ากราฟ G มีวงวน แล้วกราฟ G ไม่เป็นต้นไม้
- 1.2 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้แล้วจุด 2 จุดใดๆใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วย วิธีเพียงวิธีเดียว
- 1.3 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n จุด แล้วกราฟ G จะมีจำนวนเส้น $n-1$ เส้น

Example 2 จงบอกว่าการใดเป็นต้นไม้ พร้อมบอกเหตุผล

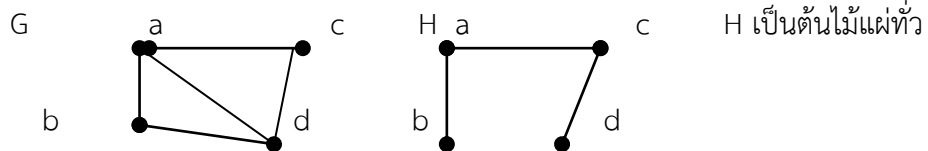


- G ไม่เป็นต้นไม้ เนื่องจาก G มีวัฏจักร
- H ไม่เป็นต้นไม้ เนื่องจาก H เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง
- T เป็นต้นไม้ เนื่องจาก T เป็นกราฟเชื่อมโยง และไม่มีวัฏจักร
- S ไม่เป็นต้นไม้ เพราะมีวงวน

Example 3 ต้นไม้ที่มีจุด 1,2,3 จะมีเพียงแบบเดียวคือ

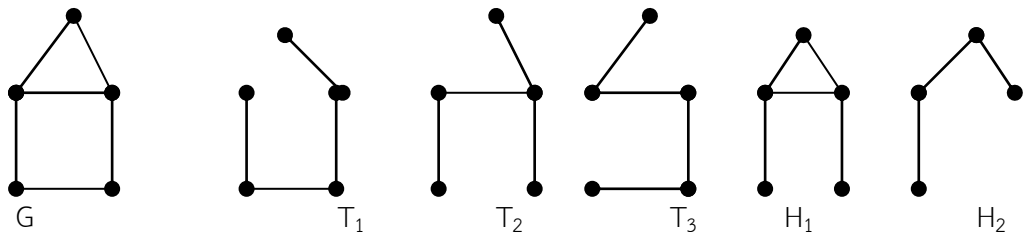


Define ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ G คือต้นไม้ซึ่งเป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่บรรจุทุกจุดของ G



spanning tree :A spanning subgraph that is a tree. Every graph has a spanning forest. But only a connected graph has a spanning tree

Example 4 พิจารณากราฟที่กำหนดให้ กราฟ T_1, T_2, T_3, H_1, H_2 สัมพันธ์กับ G อย่างไร



- จะได้ กราฟ T_1, T_2, T_3, H_1, H_2 เป็นสับกราฟของ G
- กราฟ T_1, T_2, T_3 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G
- กราฟ H_1 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G เพราะ H_1 ไม่เป็นต้นไม้เนื่องจากมีวัฏจักร
- กราฟ H_2 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G เพราะ H_2 มี $V(H) \neq V(G)$

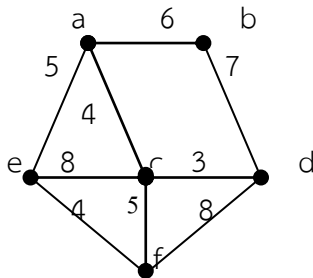
ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (minimal spanning tree)

นิยาม คือต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักแต่ละเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

เป็นการเลือกเส้นที่น้อยที่สุดจากกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักติดต่อกันเพื่อสร้างเป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักโดยเลือกเส้นกราฟไม่เกิน $n-1$ ครั้ง เมื่อกราฟมีจุด n จุด และการเลือกต้องไม่ก่อให้เกิดวัฏจักร การเลือกนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อได้ต้นไม้แผ่ทั่ว และเราเรียกต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุดว่าต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด(minimal spanning tree)

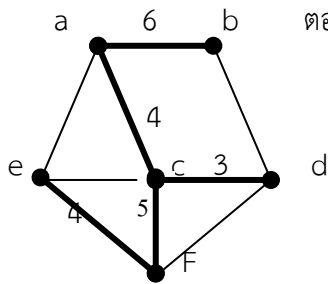
Minimal spanning tree is the spanning tree the sum of whose edge weights is less than or equal to the sum of the weights of any other spanning tree for this graph.

Example 5 แผนผังเมือง 6 เมือง คือ a,b,c,d,e และ f ดังรูป



ค่าน้ำหนักแสดงค่าใช้จ่ายการสร้างถนนเชื่อมระหว่างเมืองสองเมือง(หน่วยร้อยล้านบาท)ต้องการสร้างถนนเชื่อมติดต่อกันเมืองทั้งหมดโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

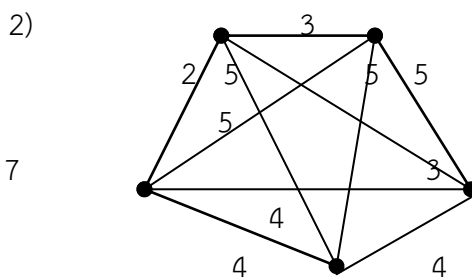
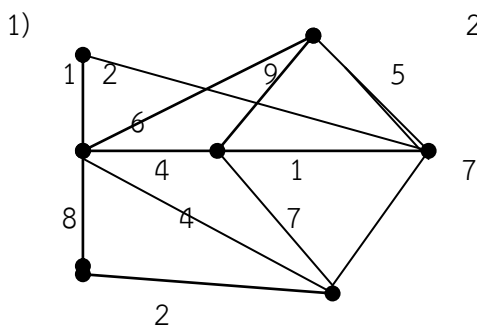
เขียนต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดได้ดังนี้



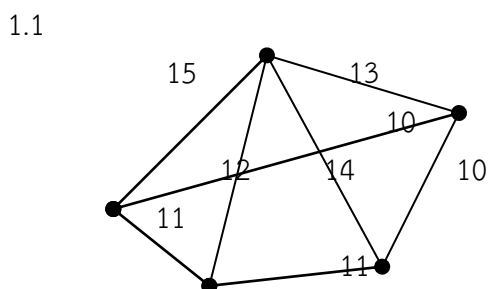
ตอบเสียค่าใช้จ่าย น้อยที่สุด $6+4+4+5+3 = 22$ ร้อยล้านบาท

แบบฝึกหัด

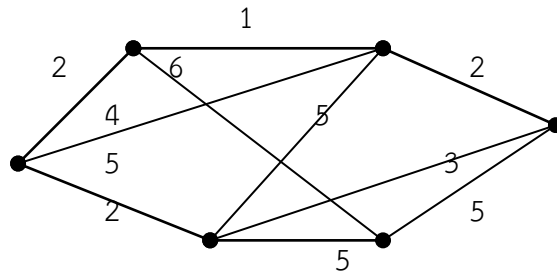
1. จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟถ่วงน้ำหนักต่อไปนี้



2. จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดจากกราฟต่อไปนี้



1.2



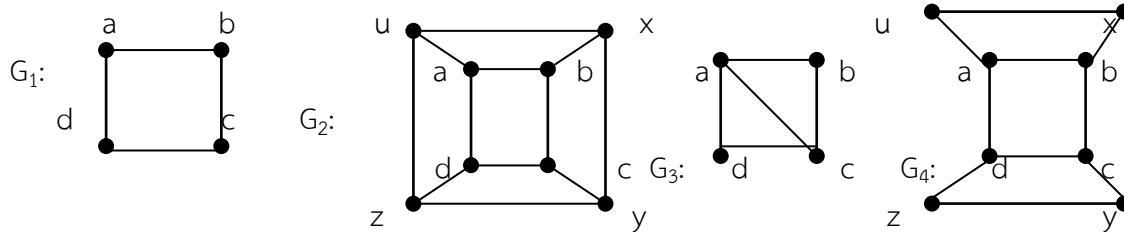
3) บริษัทรับเหมาติดตั้งโทรศัพท์ ต้องการวางสายโทรศัพท์เชื่อมโยงระหว่างสถานที่ต่างๆ 6 แห่ง ดังตารางข้างล่างถ้าบริษัทต้องการเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เขาควรจะวางสายโทรศัพท์อย่างไร (ค่าใช้จ่ายขึ้นอยู่กับความยาวของสายโทรศัพท์)

ตารางแสดงระยะทาง(กิโลเมตร)ระหว่างเมือง 2 เมือง

เมือง	กรุงเทพฯ	นครปฐม	ราชบุรี	กาญจนบุรี	สมุทรสาคร	เพชรบุรี
กรุงเทพฯ	-	7	15	11	7	10
นครปฐม	7	-	11	18	3	12
ราชบุรี	15	11	-	27	8	13
กาญจนบุรี	11	18	27	-	18	20
สมุทรสาคร	7	3	8	18	-	9
เพชรบุรี	10	12	13	20	9	-

Answer Guidance document 27

ตัวอย่าง 1 กำหนด G_1, G_2, G_3, G_4 ดังรูป

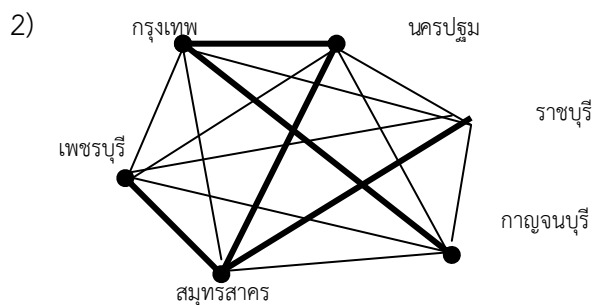


ตอบ 1) G_1 เป็นกราฟย่อยของ (G_2, G_3, G_4) 2) G_3 ไม่เป็นกราฟย่อยของ (G_1, G_2, G_4)

เฉลยแบบฝึกหัดจากเอกสารหมายเลข 27(ต้นไม้และการประยุกต์ต้นไม้)

ตอนที่ 1

1) 1.1 $A, C, D, E, B = 10+10+11+12=43$ 1.2 $D, E, F, A, B, C = 1+2+2+3+5=13$



ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดควรวางสายโทรศัพท์ $3+7+8+9+11= 38$ กิโลเมตร

ตอนที่ 2 แบบฝึก 2.5 ข้อ 2(1-2)

1) 1.1 6 1.2 10 1.3 7 1.4 7

2) 2.1 $2+4+1+2+1+5=15$ 2.2 $2+3+3+4 =12$