

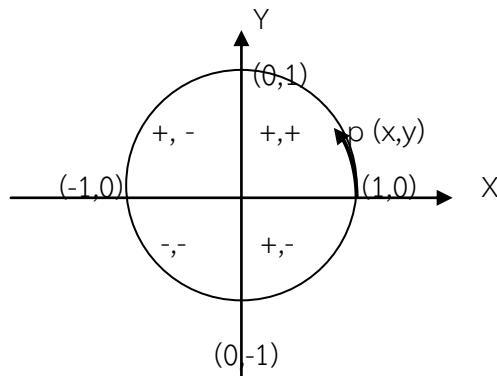
ใบความรู้		
The value of the sine and cosine		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	ค32201คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5		
ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ		

ชื่อ-สกุล..... ชั้น.....เลขที่.....

%%%

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

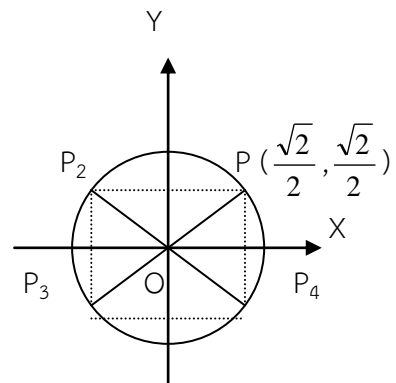
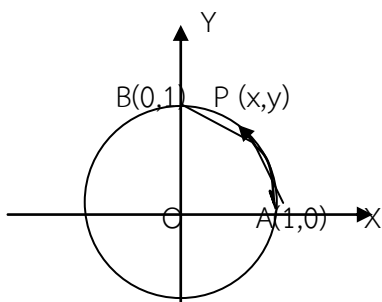
1. วงกลมหนึ่งหน่วย



ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วยคือ (1,0) ดังรูป
จะได้ $\sin 0 = 0$
 $\cos 0 = 1$

การหาค่าของ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

1) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}$



เนื่องจาก P(x,y) เป็นจุดกึ่งกลางส่วนโค้ง AB ส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB

เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ หน่วย จะได้คอร์ด PBยาวเท่ากับคอร์ดPA

$\therefore PB = PA$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้ $x = y$ แต่ $x^2 + y^2 = 1$

ดังนั้น $2x^2 = 1$

จะได้ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

แต่ (x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

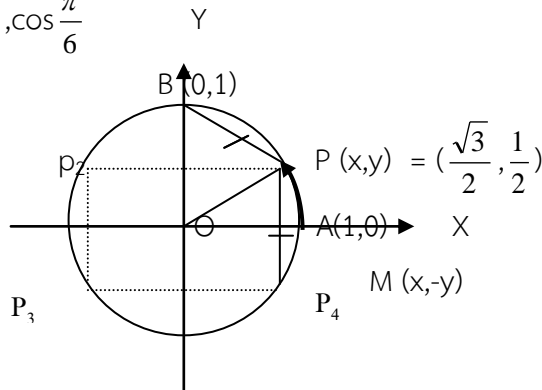
นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6}$



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ซึ่งทำให้ ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้ง

AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PB จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ให้ M เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อน

ของจุด P โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้ส่วนโค้ง AM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และ M มีพิกัดเป็น

$(x,-y)$ ดังนั้น ส่วนโค้ง PM จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

$\therefore PM = PB$

$$\sqrt{(y - (-y))^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

จะได้ $4y^2 + 2y - 2 = 0$ (เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$)

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

ดังนั้น $(2y-1)(y+1) = 0$

$$y = \frac{1}{2}, -1$$

เนื่องจาก (x,y) อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $y = \frac{1}{2}$ และ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

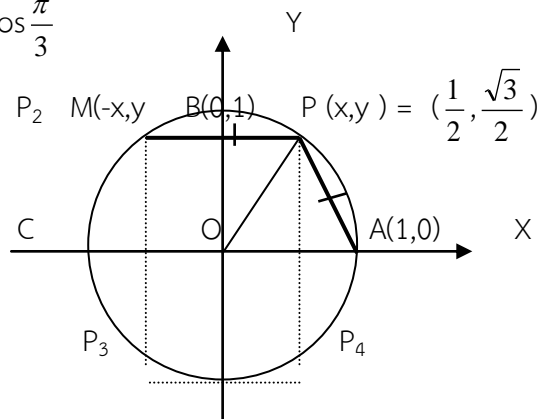
นั่นคือ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5000$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{11\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

3) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}$



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ซึ่งทำให้ ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้ M เป็นภาพสะท้อนของจุด $P(x,y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน ดังนั้นพิกัดของ M คือ $(-x,y)$

และส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว π หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PM

จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วยด้วย จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\therefore PM = PA$$

$$\sqrt{(x - (-x))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้ $4x^2 + 2x - 2 = 0$ (เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$)

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

ดังนั้น $(2x-1)(x+1) = 0$

$$x = \frac{1}{2}, -1$$

เนื่องจาก $P(x,y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

นั่นคือ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5000$ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{2\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

เงื่อนไขเพื่อให้เกิดความพอเพียง

1. เงื่อนไขความรู้ ประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับวิชาการต่างๆ ที่เกี่ยวข้องอย่างรอบด้านความรอบคอบที่จะนำความรู้เหล่านั้นมาพิจารณาให้เชื่อมโยงกันเพื่อประกอบการวางแผนและความระมัดระวังในขั้นปฏิบัติ
2. เงื่อนไขคุณธรรมที่จะต้องเสริมสร้าง ประกอบด้วยมีความตระหนักในคุณธรรม เช่น มีความซื่อสัตย์สุจริต ความอดทน ความเพียร ใช้สติปัญญาในการดำเนินชีวิต

ยังจำได้ไหม

แบบฝึกทักษะ		
การค่าฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ The values sine and cosine functions.		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
ผลการเรียนรู้ หาค่าเขียนกราฟของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมหรือจำนวนจริงที่กำหนดให้ได้ <u>Learning outcomes</u> .. Find the trigonometric functions of angles or the Real number and write graphs of trigonometric functions.		
จุดประสงค์ปลายทาง หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนที่กำหนดให้ได้ <u>Intended destination</u> Find the value of the sine and cosine of the some real number.		
ครูผู้สอน	นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ	Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan

Name Class.No.....

%%%%%%%%%

The value of the sine and cosine of a number of some real numbers.

คำสั่ง ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้แล้วหาค่าของ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ต่อไป

Alternate Example 1 Find the value of $\sin\theta$, $\cos\theta$

1) $\theta = -\frac{5\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้ง $(-\frac{5\pi}{4})$ อยู่ในควอร์ตรันต์ที่ 2 ดังนั้น

$$\cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} , \quad \sin(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $\theta = -\frac{7\pi}{4}$ End of the point arc $-\frac{7\pi}{4}$ on the Quadrant.....so

.....

3) $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

.....

4) $\theta = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$

.....

5) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

.....

6) $\theta = \frac{-7\pi}{6}$

.....

7) $\theta = \frac{-7\pi}{3}$

.....

8) $\theta = \frac{13\pi}{3}$

.....

9) $\theta = \frac{37\pi}{6}$

.....

10) $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$

.....

Example 2 Find the value of θ for 5 The number

1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

Answer

2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Answer

3) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Answer

เฉลยเอกสารหมายเลข 23

1) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6}$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{11\pi}{6}$ หน่วยคือจุด $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

3) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}$

จะได้ P_2 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{2\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

จะได้ P_3 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

จะได้ P_4 แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{3}$ หน่วยคือจุด $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

เฉลยเอกสารหมายเลข 23.1 (แบบฝึกทักษะ)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า $\cos \theta, \sin \theta$

2) $\frac{-7\pi}{4}$ ตอบ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3) $2\pi + \frac{\pi}{4}$ ตอบ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$4) 2\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{ตอบ } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$5) -\frac{\pi}{3} \quad \text{ตอบ } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$6) \frac{-7\pi}{6} \quad \text{ตอบ } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$7) \frac{-7\pi}{3} \quad \text{ตอบ } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$8) \frac{13\pi}{3} \quad \text{ตอบ } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$9) \frac{37\pi}{6} \quad \text{ตอบ } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$10) \pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{ตอบ } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 2

$$1) \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ตอบ } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$$

$$2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ตอบ } \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4}$$

$$3) \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ตอบ } \theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}$$