Cosine of sum and difference identities of angles		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<u>ผลการเรียนรู้</u> ใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่างมุมพหุคูณ ผลคูณ ไปใช้ <u>Learning outcomes</u> Apply the sum and difference**,**double- angle and half- angle **identities** to problem solving		
<u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> หาค่าโคไซน์ของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุมและนำไปใช้แก้ปัญหาได้ <u>Intended destination</u> Appply Cosine of the sum and difference identities of angles to problem solving		
ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan		

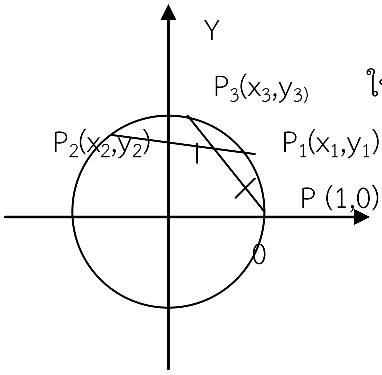
Name .... Class. ....No............

%%%

โคไซน์ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

(Cosine of sum and difference identities of angles)

1) โคไซน์ของผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม กำหนดให้ A และ B เป็นจำนวนจริง (มุมใดๆ) อยู่ในช่วง $[0,2\pi]$ และ A $\geq$ B จากวงกลม 1 หน่วย



ให้ P_1, P_2,P_3 เป็นจุดใดๆซึ่งความยาวส่วนโค้ง PP_1 ยาว B หน่วย และ P_1 (x_1 ,y_1) = (cosB , sinB)

ความยาวส่วนโค้ง PP_2 ยาว A หน่วย และ P_2 (x_2 ,y_2) = (cosA , sin A)

ความยาวส่วนโค้ง P_1P_2 ยาวA-B หน่วย

ให้ $P_3(x_3 ,y_3)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้ง PP_3 ยาว A-B หน่วย $P_3(x_3 ,y_3)$= (cosA-B,sinA-B)

ในวงกลมเดียวกัน เมื่อส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว คอร์ดที่รองรับส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน ดังนั้น คอร์ด PP_3 เท่ากับ คอร์ด P_1P_2 นั่นคือ $|pp_3| = |p_1p_2|$

$\therefore$ $(x_3-1)^2 + (y_3-0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

$x_3^2-2x_3+1+y_3^2 = x_2^2-2x_2x_1+ x_1^2 + y_2^2-2y_2y_1+ y_1^2$

$(x_3^2+y_3^2) -2x_3+1=(x_2^2 +y_2^2)+(x_1^2+ y_1^2) -2x_2x_1-2y_2y_1$

$1-2x_3+1=1+1-2x_2x_1-2y_2y_1$

$x_3=x_2x_1+y_2y_1$

cos(A-B)=cosAcosB+sinAsinB

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$x_1^2 + y_1^2 = 1$
$x_2^2 + y_2^2 = 1$
$x_3^2 + y_3^2 = 1$

2) โคไซน์ของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม(Cosine of difference identities of angles)

cos (A+B) = cos [A-(-B)] ซึ่ง $\cos(-\theta) = \cos\theta$ และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

= cosAcos(-B)+sinAsin(-B)

$\therefore$ cos (A+B) = cosAcosB- sinAsinB

Alternate Example 1 Find the value of cosine by using sum and difference identities

1) $\cos\frac{13\pi}{12} = -\cos(\frac{13\pi}{12} - \pi)$

$= -\cos\frac{\pi}{12}$

$= -\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$

$= -[\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}]$

$= -[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$= -\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$

2) cos 75^0 ....

....

....

....

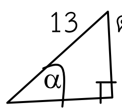
....

....

....

3)ให้ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ และ $\cos\alpha = \frac{-5}{13}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$ จงหา $\cos(\alpha \pm \beta)$

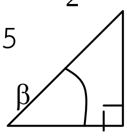
solution $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, α อยู่ Q_3, $\cos\alpha = \frac{-5}{13}$



ด้านที่เหลือยาว..........

$\sin\alpha$ =...........

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, β อยู่ Q_2 $\sin\beta = \frac{4}{5}$



ด้านที่เหลือยาว..........

$\cos\beta$ =............

$\cos(\alpha+\beta)$ =...

....

....

....

$\cos(\alpha-\beta)$=...

....

....

....

Alternate Example 2 Prove the Identity.

1) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= 0 \times \cos\theta + 1 \times \sin\theta$

$= \sin\theta$

therefore $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

2) $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

solution $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)$

=...

=...

=...

=..

=...

<u>แบบฝึกหัดจากแบบเรียน</u>

แบบฝึกหัด 2.7

1.จงใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมหาค่าต่อไปนี้

1) $\cos(60^{0}+45^{0})$

2) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3})$

3) $\cos165^{0}$

4) $\cos225^{0}$

2. จงหาค่าของ$\sin(-\frac{5\pi}{2})\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\frac{5\pi}{2})$

3. จงหาค่าของ$\sin(\frac{\pi}{3})\cdot\sin(-\frac{\pi}{4})+\cos(-\frac{\pi}{4})\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

6. จงแสดงว่า $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1-\tan\alpha\tan\beta$

เฉลยเอกสารหมายเลข 31

ตัวอย่าง 1จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $\cos(\alpha+\beta) = \frac{63}{65}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{33}{65}$

ตัวอย่างที่ 2

1) $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$

พิสูจน์ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= 0\times\cos\theta + 1\times\sin\theta$

$= \sin\theta$

ดังนั้น $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$

2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = [\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta][\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta]$

$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\cos\beta\times\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\times\cos\alpha\cos\beta -$
$\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$= \cos^2\alpha\ (1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta\ (1-\cos^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\beta\ \ \cos^2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 2) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 4) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

2. -1

3. $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

6. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1-\tan\alpha\tan\beta$$