

Cofunctions and complementary angles		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<p><u>ผลการเรียนรู้</u> ใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่างมุมพหุคูณ ผลคูณ ไปใช้</p> <p><u>Learning outcomes</u> Apply the sum and difference, double- angle and half- angle identities to problem solving</p>		
<p><u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> หาค่าของโคฟังก์ชันของตรีโกณมิติและไซน์ของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุมได้</p> <p><u>Intended destination</u> Express the trigonometric functions of and angle in terms of their cofunctions and complement.</p>		
ครูผู้สอน	นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ	Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan

Name Class.No.....

%%%%%%%%%

complementary angles are angles whose sum is 90^0 . Two trigonometric functions that have equal value for complementary angles are called *cofunctions*

1โคฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันที่จับคู่กันเป็นคู่ คือ sin กับ cos , cot กับ tan , csc กับ sec

โคฟังก์ชัน $\frac{\pi}{2} - \theta$	โคฟังก์ชัน $\frac{\pi}{2} + \theta$	โคฟังก์ชัน $\frac{3\pi}{2} - \theta$	โคฟังก์ชัน $\frac{3\pi}{2} + \theta$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos \theta$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos \theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin \theta$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$
$\csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec \theta$	$\csc(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sec \theta$	$\csc(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sec \theta$	$\csc(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\sec \theta$
$\sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc \theta$	$\sec(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\csc \theta$	$\sec(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\csc \theta$	$\sec(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \csc \theta$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$	$\cot(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$

2) ไซน์ของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จากการพิสูจน์ $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]$$

ให้ $\theta = \alpha + \beta$ จะได้

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

ในทำนองเดียวกัน $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ให้ $\theta = \alpha - \beta$ จะได้

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Alternate Example 1 Express the following as a function of the complementary angle. given $0^\circ < \theta < 90^\circ$

1) $\cos 205^\circ = \cos(270^\circ - 65^\circ) = -\sin 65^\circ$

หรือ $\cos 205^\circ = -\cos(205^\circ - 180^\circ) = -\cos 25^\circ = -\sin 65^\circ$

2) $\sin(-215^\circ) = -\sin 215^\circ = \dots\dots\dots$

3) $\tan(-340^\circ) = -\tan 340^\circ = \dots\dots\dots$

4) $\sec 140^\circ = \dots\dots\dots$

.....0

Alternate Example 2 Express the following as a function of the complementary angle

<p>1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p>	<p>2) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p> <p>=.....</p>
--	--

3) $\cos 68^\circ \cos 38^\circ + \cos 22^\circ \sin 38^\circ$

.....

.....

.....

4) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \sin \beta = \frac{3}{5}$ จงหา $\sin(\alpha \pm \beta)$

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดจากแบบเรียน

แบบฝึกหัด 2.7

4. จงหาค่าต่อไปนี้

- 1) $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ$
- 2) $\cos 70^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ \sin 20^\circ$
- 3) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$
- 4) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$

9. จงแสดงว่า

- 1) $\cos(x-30^\circ) - \cos(x+30^\circ) = \sin x$
 - 2) $\cos(x+45^\circ) + \cos(x-45^\circ) = \sqrt{2} \cos x$
 - 3) $\sin(x-30^\circ) + \sin(x+30^\circ) = \sqrt{3} \sin x$
14. ถ้า $\frac{\pi}{2} < x < \pi, \pi < y < \frac{3\pi}{2}$ และ $\cos x = \frac{-3}{5}, \tan y = \frac{5}{12}$ จงหา $\cos(x+y)$

เฉลยเอกสารหมายเลข 32

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าต่อไปนี้ในรูปโคฟังก์ชันของมุม θ โดยที่ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$2) \sin(-215^\circ) = -\sin 215^\circ = \cos 65^\circ$$

$$3) \tan(-340^\circ) = -\tan 340^\circ = \cot 70^\circ$$

$$4) \sec 140^\circ = -\operatorname{cosec} 50^\circ$$

$$5) \cot 250^\circ = \tan 20^\circ$$

ตัวอย่าง 2 จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \cos 68^\circ \cos 38^\circ + \cos 22^\circ \sin 38^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4) \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \sin \beta = \frac{3}{5} \quad \text{จงหา } \sin(\alpha \pm \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{64}{65} \quad \sin(\alpha - \beta) = \frac{-8}{65}$$

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.7

$$4. \quad 1) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos 90^\circ = 0$$

$$3) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$4) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$9. \quad 1) \cos(x-30^\circ) - \cos(x+30^\circ) = 2\sin x \sin 30^\circ = 2\sin x \left(\frac{1}{2}\right) = \sin x$$

$$2) \cos(x+45^\circ) + \cos(x-45^\circ) = 2\cos x \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cos x$$

$$3) \sin(x-30^\circ) + \sin(x+30^\circ) = 2\sin x \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin x$$

$$14. \quad \sin x = \frac{4}{5}, \quad \cos x = \frac{-3}{5}, \quad \cos y = \frac{-12}{13}, \quad \sin y = \frac{-5}{13}, \quad \tan y = \frac{5}{12}, \quad \cos(x+y) = \frac{56}{65}$$