Tangent and cotangent of sum and difference identities of angles		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<u>ผลการเรียนรู้</u> ใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่างมุมพหุคูณ ผลคูณ ไปใช้ <u>Learning outcomes</u> Appply the sum and difference,double- angle and half- angle identities to problem solving		
<u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> หาค่าของแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุมและนำไปใช้แก้ปัญหาได้ <u>Intended destination</u> Appply tangent and cotangent of the sum and difference identities of angles to problem solving		
ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan		

Name .... Class. ....No.............

%%

1. <u>แทนแจนต์ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม</u>

(Tangent of sum and difference identities of angles**)**

ให้ α,β เป็นจำนวนจริงหรือมุม ซึ่ง $\cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0$

1.1 $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

นำ $\cos\alpha \cos\beta$ หารทั้งเศษและส่วนได้

$$= \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

1.2 $\tan(\alpha+\beta) = \tan(\alpha - (-\beta))$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \tan[\alpha-(-\beta)]$

$= \dfrac{\tan\alpha - \tan(-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(-\beta)}$

=..........................

=..........................

=..........................

=..........................

=..........................

=..........................

=..........................

2. <u>โคแทนแจนต์ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม</u>

(cotangent of sum and difference identities of angles)

ให้ α, β เป็นจำนวนจริงหรือมุมซึ่ง sin $\alpha \neq 0$,sin $\beta \neq 0, \sin(\alpha-\beta) \neq 0$

2.1 cot $(\alpha-\beta) = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

นำ sin α sin β หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha c\sin\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha c\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha c\sin\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha c\sin\beta}}$$

$$= \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

cot $(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

2.2 cot $(\alpha+\beta) = \cot(\alpha - (-\beta))$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$$\therefore \cot(\alpha+\beta) = \cot[\alpha - (-\beta)]$$

$$= \frac{\cot\alpha\cot(-\beta) + 1}{\cot(-\beta) - \cot\alpha}$$

$$= \frac{-\cot\alpha\cot\beta + 1}{-\cot\beta - \cot\alpha}$$

$$= \frac{-(\cot\alpha\cot\beta - 1)}{-(\cot\beta + \cot\alpha)}$$

$$= \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

cot $(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

<u>Example 1</u> Express the following as a function by using sum and difference identity

1) $\tan(-195°) = -\tan 195° = -\tan(195° - 180°)$

$= -\tan 15$

$= -\tan(45° - 30°)$

$= -[$.......... .... $]$

=..........................

=..........................

=..........................

=..........................

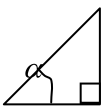
=..........................

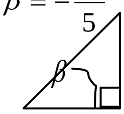
=..........................

2) $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\tan\beta = -\dfrac{12}{5}$, α อยู่ Q_3, β อยู่ Q_2

จงหา $\cot(\alpha - \beta)$

$\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$ $\tan\beta = -\dfrac{12}{5}$





$\therefore \cot\alpha =$ $\therefore \cot\beta =$

=..

=..

=..

=..

=..

=..

3) tan 75° - tan 30° - tan75° .tan 30°

<u>วิธีทำ</u> tan 45° = tan (75° - 30°)

=..

=..

=..

=..

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม/แบบเรียน

1.จงใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมหาค่าต่อไปนี้

1) $\tan 105^0$

2) $\cos\frac{7\pi}{12}$

2.จงหาค่า $\sin(\alpha+\beta)$ $\cos(\alpha+\beta)$ $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\tan(\alpha-\beta)$ เมื่อกำหนดให้

$\tan\alpha=\frac{-4}{3}$, $\frac{\pi}{2}\angle\alpha\angle\pi$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, $0\angle\beta\angle\frac{\pi}{2}$

3.ถ้า $\sin x=\frac{3}{5}$, $\sin(x+y)=\frac{-5}{13}$ และ $0\angle x\angle\frac{\pi}{2}$, $\pi\angle x+y\angle\frac{3\pi}{2}$ จงหา

1) $\sin y$

2) $\tan(x+y)$

4.จงหาค่าต่อไปนี้

1) $\frac{\tan 50^\circ-\tan 20^\circ}{1+\tan 50^\circ\tan 20^\circ}$

2) $\frac{\cot 46^\circ\cot 16^\circ+1}{\cot 16^\circ-\cot 46^\circ}$

5.จงแสดงว่า

1) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

2) $\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=\frac{\cot A-1}{\cot A+1}$

เฉลยเอกสารหมายเลข33

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1.tan(-195°) = $\sqrt{3}-2$

2. cot (α - β) = $\frac{-11}{75}$

3. tan 75° - tan 30° - tan 75° .tan 30° =1

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1) tan 105= -2-$\sqrt{3}$ 2) tan $\frac{19\pi}{12}$ =-2-$\sqrt{3}$

2. sin($\alpha\pm\beta$) = $\frac{4\mp3\sqrt{3}}{10}$, cos($\alpha\pm\beta$) = $\frac{-3\mp4\sqrt{3}}{10}$, tan(α-β) = $\frac{4+3\sqrt{3}}{-3+4\sqrt{3}}$

3. 1) siny = $\frac{16}{65}$ 2) tan(x+y) = $\frac{5}{12}$

4. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\sqrt{3}$

5 1) tan ($\frac{\pi}{4}$-A) = $\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan A}$ = $\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

2) cot ($\frac{\pi}{4}$+A) = $\frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot A-1}{\cot A+\cot\frac{\pi}{4}}=\frac{\cot A-1}{\cot A+1}$