

The Triple and Half angles fomulas		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<p><u>ผลการเรียนรู้</u> ใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่างมุมพหุคูณ ผลคูณ ไปใช้</p> <p><u>Learning outcomes</u> Apply the sum and difference, double- angle and half- angle identities to problem solving</p>		
<p><u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> นำเอกลักษณ์ของมุมทวีคูณหรือมุมขนาดสาม เท่า ครึ่งเท่า ของมุมใดๆ ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p><u>Intended destination</u> Apply the triple and half angle identities to problem solving</p>		
ครูผู้สอน	นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ	Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan

Name Class.No.....

%%%%%%%%%

ฟังก์ชันตรีโกณของมุมตรีคูณหรือ 3 เท่า ครึ่งเท่าของมุมหรือจำนวนจริงใดๆ

1) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

3) $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$

2) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

4) $\cot 3\theta = \frac{\cot^3 \theta - 3 \cot \theta}{3 \cot^2 \theta - 1}$

<p>Prove the identities</p> <p>1) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$</p> <p>$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$</p> <p>$= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$</p> <p>$= 2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta$</p> <p>$= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$</p> <p>$= 2 \sin \theta(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$</p> <p>$= 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$</p> <p>$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$</p> <p>2) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$</p> <p>$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$</p> <p>$= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$</p> <p>$= \cos 2\theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta$</p> <p>$= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$</p> <p>$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta$</p> <p>$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^3 \theta$</p> <p>$= \dots\dots\dots$</p>	<p>3) $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$</p> <p>$\tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \tan \theta}$</p> <p>$= \frac{\left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right) + \tan \theta}{1 - \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right) \tan \theta}$</p> <p>$= \frac{2 \tan \theta + \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - \tan^2 \theta - 2 \tan^2 \theta}$</p> <p>$= \frac{2 \tan \theta + \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - \tan^2 \theta - 2 \tan^2 \theta}$</p> <p>$= \dots\dots\dots$</p> <p>4. $\cot 3\theta = \frac{\cot^3 \theta - 3 \cot \theta}{3 \cot^2 \theta - 1}$</p> <p>$\cot 3\theta = \cot(2\theta + \theta) = \dots\dots\dots$</p> <p>$= \dots\dots\dots$</p>
--	--

2) The Half angles fomulas

$$1. \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2})$$

$$3. \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$2. \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2})$$

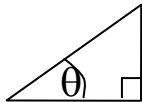
$$4. \cot \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

*** เลือกใช้สูตรบวก (+) หรือลบ (-) ขึ้นอยู่กับ $\frac{\theta}{2}$ ว่าอยู่ในควอดรันต์ใด *****

Example Find the values of triple and half angle

Given, $\sin \theta = \frac{-3}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$ find the values of $\cos 3\theta, \tan 3\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cot \frac{\theta}{2}$

solution



$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

$\cos 3\theta = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$180^\circ < \theta < 270^\circ \therefore \frac{180^\circ}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270^\circ}{2}$ so

$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\tan 3\theta = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ \therefore \frac{\theta}{2}$ อยู่ Q_2

$\therefore \cot \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\cos \text{ec } \theta = \frac{5}{3}$ เมื่อ $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ จงหา $\sin 3\theta, \cot 3\theta$

2. ถ้า $\cos 1.04 = 0.50$ จงหา $\sin 0.52$

3. $\cos 64^\circ = 0.44$ จงหา $\cos 32^\circ$

4. $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\sec \theta = \frac{5}{4}$ จงหา $\tan \frac{\theta}{2}$

5. $-180^\circ < \theta < -90^\circ$ และ $\tan \theta = 1$ จงหา $\cot \frac{\theta}{2}$

ឆេត

1. $\sin 3\theta = \frac{117}{125}$, $\cot 3\theta = \frac{-44}{125}$ 2) 0.5 3) 0.8484 4) $\frac{1}{3}$ 5) $1-\sqrt{2}$