

<b>ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์(arctangent)</b> The inverse of the tangent functions		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
ผลการเรียนรู้ พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติและแก้สมการตรีโกณมิติได้		
Learning outcomes Prove the trigonometric functions,the inverse trigonometric functions. And solve trigonometric equation.		
จุดประสงค์ปลายทาง บอกโดเมนและเรนจ์และหาค่าของตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ได้		
Intended destination Find the domain and the range and the value of the inverse of the tangent function		
ครูผู้สอน	นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ	Instructor. Mrs. Malaiporn uasuan

Name ..... Class. ....No.....

%%%

The inverse of the tangent functions (arc tangent)

<p>1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้</p> <p>1.1 กราฟฟังก์ชันแทนเจนต์</p> <p style="text-align: center;"><math>y = \tan x</math> พิจารณา ช่วง <math>f_{1-1}</math></p> $f = \left\{ (x, y) / y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$ $D_f = \left\{ x / -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\} \quad R_f = \mathbb{R}$	<p>1.2 กราฟของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์</p> <p style="text-align: center;">ช่วง <math>f_{1-1}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>x = \tan y</math> ก็ต่อเมื่อ <math>y = \arctan x</math></p> $f^{-1} = \left\{ (x, y) / x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}$ <p>หรือ <math>f^{-1} = \left\{ (x, y) / y = \arctan x, -\frac{\pi}{2} &lt; y &lt; \frac{\pi}{2} \right\}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>D_{f^{-1}} =</math> <span style="margin-left: 150px;"><math>R_{f^{-1}} =</math></span></p>
---	--

ดังนั้น	$x = \tan y$	ก็ต่อเมื่อ	$y = \arctan x$
แล้ว	$\tan(\arctan x) = x$		$, x \in \mathbb{R}$
	$\arctan(\tan x) = x$		$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Alternate Example 1 Find the values of the inverse of the functions

$$1. \tan(\arcsin(\cos \frac{\pi}{6}))$$

$$= \tan(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$$

ให้  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$  ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \tan(\arcsin(\cos \frac{\pi}{6})) = \tan \theta = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

Example 2 Prove the identity

$$\arctan x + \arctan(-x) = \arctan 0$$

solution ให้  $\arctan x = A \therefore \tan A = x$

$$\arctan(-x) = B \therefore \tan B = -x$$

$$\dots (\arctan x + \arctan(-x)) = \dots (A+B)$$

$$2. \arcsin \frac{4}{5} + \arctan \frac{3}{4}$$

solution

ให้  $\arcsin \frac{4}{5} = A \therefore \sin A = \frac{4}{5} \therefore \cos A = \dots$

ให้  $\arctan \frac{3}{4} = B \therefore \tan B = \frac{3}{4}$

$$\therefore \sin B = \dots \cos B = \dots$$

$$\dots (\arcsin \frac{4}{5} + \arctan \frac{3}{4}) = \dots (A+B)$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาค่า

1)  $\tan(\arctan \frac{1}{2})$

2)  $\csc(\arctan \frac{1}{2})$

3)  $\sin[\arctan(-3)]$

4)  $\cos(\arctan 3.2709)$

5)  $\sin[\arctan 2]$

2. จงแสดงว่า

1)  $\arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan 1$

2)  $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$

3)  $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$

เฉลยเอกสารหมายเลข 43

1.2 กราฟของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) / y = \arctan x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\} \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$2. \cos A = \frac{3}{5} \therefore \sin B = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}$$

$$\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arctan \frac{3}{4}\right) = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arctan \frac{3}{4} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า  $\arctan x + \arctan(-x) = \arctan 0$

วิธีทำ ให้  $\arctan x = A \therefore \tan A = x$  ,  $\arctan(-x) = B \therefore \tan B = -x$

$$\tan(\arctan x + \arctan(-x)) = \tan(A+B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{x + (-x)}{1 - x(-x)} = 0 \end{aligned}$$

$$\arctan x + \arctan(-x) = \arctan 0$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1.    1)  $\frac{1}{2}$             2)  $\sqrt{5}$             3)  $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$             4) 0.2924            5)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2.    1)  $\arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan 1$

$$\arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \arctan \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = \arctan 1$$

3)  $2\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \arctan \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \arctan \frac{1}{\frac{3}{4}}$  แต่  $2\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$

3)  $\sec(\arctan x) = \sec \theta$             ให้  $\arctan x = \theta$  ,  $\tan \theta = x$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}$$

$$\sec(\arctan x) = \sqrt{1 + x^2}$$