<table>
<tr><td colspan="3">ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคซีแคนท์ , ซีแคนท์ , โคแทนเจนต์
The inverse of the cosecant secant cotangent functions
And Equations of the inverse trigonometric</td></tr>
<tr><td>กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์</td><td>สาระที่ 4 พีชคณิต</td><td>วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>ผลการเรียนรู้</u> พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติและแก้สมการตรีโกณมิติได้
<u>Learning outcomes</u> Prove the trigonometric functions,the inverse trigonometric functions. And solve trigonometric equation.</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>จุดประสงค์ปลายทาง</u> บอกโดเมนและเรนจ์และแก้สมการของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
<u>Intended destination</u> Find the domain and the range and And solve the inverse trigonometric equation.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan</td></tr>
</table>

Name .... Class. ....No.............

%%

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคซิแคนท์ , ซีแคนท์ , โคแทนเจนต์

1) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคซีแคนต์

$$f = \left\{(x,y)/\, y = \operatorname{arccos} ecx,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

หรือ $f = \left\{(x,y)/\, x = \cos ecy,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$

$x\ \varepsilon\ (-\alpha,-1] \cup [1,\alpha)$

x = cosec y $\leftrightarrow$ y = arccosec x แล้ว

$\therefore$ cosec (arccosec x) = x ,

$D_f = (-\alpha,1] \cup [1,\alpha)$, $R_f = \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

arccosec(cosecx) = x , $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันซีแคนต์

$$f = \left\{(x,y)/\, y = arc\sec x,\ y \in \left[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi\right]\right\}$$

หรือ $f = \left\{(x,y)/\, x = \sec y,\ y \in \left[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi\right]\right\}$

$\therefore$ x = sec y $\leftrightarrow$ y = arcsec x แล้ว

sec (arcsec x) = x , $x \in (-\alpha,-1] \cup [1,\alpha)$

$D_f = (-\alpha,1] \cup [1,\alpha)$, $R_f = \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

arcsec(secx)= x, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

3) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

$$f = \{(x,y)/\, y = arc\cot x, 0 < y < \pi\}$$

หรือ $f = \{(x,y)/\, x = \cot y, 0 < y < \pi\}$

$D_f = R$, $R_f = (0,\pi)$

$\therefore$ x = cot y $\leftrightarrow$ y = arccot x แล้ว

cot (arccot x) = x , $x \in R$

arccot(cotx)= x, $x \in (0,\pi)$

สูตรผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่น่าสนใจ

1) arcsin x = arccosec $\frac{1}{x}$ $\left(\sin x = \frac{1}{csex}\right)$ 7) 2arctan x = arctan $\frac{2x}{1-x^2}, \left(\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)$

2) arccosec x = arcsin $\frac{1}{x}$ $\left(\cos ecx = \frac{1}{\sin x}\right)$ 8) 2arccot x = arccot $\frac{x^2-1}{2x}, \left(\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}\right)$

3) arccos x = arcsec $\frac{1}{x}$ 9)arctan x + arctany = arctan $\frac{x+y}{1-xy}$

4) arcsec x = arccos $\frac{1}{x}$ 10) arctan x - arctany = arctan $\frac{x-y}{1+xy}$

5) arctan x = arccot $\frac{1}{x}$ 11)arccot x+arccot y = arccot $\frac{xy-1}{y+x}$

6) arccot x = arctan $\frac{1}{x}$ 12) arccot x - arccot y = arccot $\frac{xy+1}{y-x}$

Alternate Example 1 Find the values of the inverse of the functions

1.sin $\left(\frac{1}{2} arc\ \cot -\frac{3}{4}\right)$

arccot $\left(-\frac{3}{4}\right) = A$ $0 < A < \pi$

cotA = $-\frac{3}{4}$,cosA=.... SinA=

$\therefore \sin\left(\frac{1}{2} arc\ \cot -\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{1}{2}A = \sin\frac{A}{2}$

= $\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

=

Example 2 Prove the identity arctan3 + 2arctan2 = arccot3

solution arctan3+2 arctan2 = arctan3 + arctan $\frac{(2)(2)}{1-2^2}$

=

2. Equations of the inverse trigonometric

การแก้สมการคือหาคำตอบของสมการของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติจะต้องตรวจสอบจำนวนจริงที่ได้เสมอเพราะจำนวนจริงที่ได้จากการแก้สมการไม่จำเป็นต้องเป็นคำตอบของสมการเสมอไปการตรวจสอบ ไม่จำเป็นต้องหาค่าฟังก์ชันผกผัน เพียงแต่ว่า จำนวนจริงที่ได้มานั้นหลังจากแทนค่าตัวแปรในสมการแล้วไม่เกิดการขัดแย้ง

Alternate Example 1 Solve trigonometric equation $\arccos(2x^2-1) = 2\arccos\frac{1}{2}$

วิธีทำ 1) ให้ $\arccos(2x^2-1) = A$

$\cos A = 2x^2-1 \quad 0 \le A \le \pi$

และ $\arccos\frac{1}{2} = B \quad \cos B = \frac{1}{2}, 0 \le B \le \pi$

$\therefore \arccos\left(2x^2-1\right) = 2\arccos\frac{1}{2}$

$A = 2B$

$\therefore \cos A = \cos 2B$

$\cos A = 2\cos^2 B - 1$

.....

ทดสอบ

แทน x =..... จะได้ arccos..... = arccos..... (1)

และ $2\arccos\frac{1}{2}$ =..... (2)

จะได้ (1)=(2) ซึ่งเป็นจริง

ตอบ.....

แบบฝึกทักษะ

1. จงหาค่า

1) $\tan\left(\arctan\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,cot}\frac{15}{8}\right)$

2) $\operatorname{arc\,cot}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,cot}\frac{1}{3} + \arctan\frac{7}{9}$

2จงแสดงว่า $\operatorname{arc\,cot}\frac{63}{16} + 2\arctan\frac{1}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$

3.จงแก้สมการ

1) $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{3\pi}{4}$

2). $\arcsin x = \arccos(-x)$

3). $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$

เฉลยเอกสารหมายเลข 44-45

<u>วิธีทำ</u> 2) $\arccos(2x^2-1) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\arccos(2x^2-1) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos(\arccos 2x^2-1) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x^2-1 = \frac{-1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

ทดสอบ

แทน $x = \pm\frac{1}{2}$ จะได้ $\arccos\left(2(\frac{\pm1}{2})^2 - 1\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}-1\right) = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ .....(1)

ซึ่ง $2\arccos\frac{1}{2} = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ .....(2)

(1)=(2)

ตอบ $\{\pm\frac{1}{2}\}$

เฉลยแบบฝึกหัดหมายเลข 44-45

1. 1) $\frac{77}{36}$ 2) $\frac{\pi}{4}$

2. $\arctan\frac{16}{63} + 2\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{16}{63} + \arctan\frac{2\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}$

$$= \arctan\frac{16}{63} + \arctan\frac{5}{12}$$

$$= \arctan\frac{\frac{16}{63}+\frac{5}{12}}{1-\frac{16}{63}.\frac{5}{12}}$$

$$= \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\arctan\frac{16}{63} + 2\arctan\frac{1}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\arctan\frac{16}{63} + 2\arctan\frac{1}{5}$$

3. 1) 2) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ 3) $\{\frac{1}{3}\}$