Verifying Trigonometric Identities and trigonometric equation		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
ผลการเรียนรู้ พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติและแก้สมการตรีโกณมิติได้ Learning outcomes Prove the trigonometric functions,the inverse trigonometric functions. And solve trigonometric equation.		
จุดประสงค์ปลายทาง พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติได้ Intended destination Proving Trigonometric Identities		
ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan		

Name .... Class. ....No.............

%%

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ Trigonometric Identities and trigonometric equation

1. Trigonometric equation คือ สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติของตัวแปรปรากฏ เช่น

$$\cos x = \frac{1}{2}, 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

2. Trigonometric Identities หรือสมการเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คือ สมการที่เป็นจริงเมื่อแทนตัวแปรกับจำนวนจริงใด ๆ แล้วทุกพจน์มีความหมาย เช่น $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

Example Verify the Identity

1. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

solution $\tan^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1-\cos^2 x)$$

$$= \tan^2 x \sin^2 x$$

$\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

2. $\dfrac{\cos 5x}{\sin 4x} + \dfrac{\sin 5x}{\cos 4x} = \dfrac{\cos x}{\sin 4x \cos 4x}$

solution

$$\frac{\cos 5x}{\sin 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 4x} = \frac{\text{..........................}}{\sin 4x \cos 4x}$$

$$= \frac{\cos(\text{......} \ \text{.......})}{\sin 4x \cos 4x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin 4x \cos 4x}$$

$$\frac{\cos 5x}{\sin 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 4x} = \frac{\cos x}{\sin 4x \cos 4x}$$

3. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

....

....

....

....

....

4)sin 2x – cos 2x·tan x = tan x

<u>solution</u> sin 2x – cos 2x·tan x $= \left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) - \left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{1+\tan^2 x}\right)\tan x$

$= \left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - (\tan x - \tan^3 x)}{1+\tan^2 x}\right)$

$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{1+\tan^2 x}$

$= \frac{\tan x(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{1+\tan^2 x}$

sin 2x – cos 2x·tan x = tan x

5) $\sin^2 x \tan x + \cos^2 x \cot x + 2\sin x\cos x = \tan x + \cot x$

<u>solution</u>

แบบฝึกหัด

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. csc x cos x = cot x
2. cos x(tan x + cot x) = csc x
3. (sec x – 1)(sec x + 1) = $\tan^2 x$
4. $\sin^2 x(1+\cot^2 x) = 1$
5. $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$
6. $\sin^2 x\cot^2 x + \tan^2 x\cos^2 x = 1$
7. $\sec x - \sec x \sin^2 x = \cos x$
8. $2\sin^2 x - 1 = 1 - 2\cos^2 x$
9. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$
10. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

เฉลยเอกสารหมายเลข 46-47

3. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

พิสูจน์ $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$= (\sin^2+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=1+1$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2 = 2$

4)$\sin 2x - \cos 2x\cdot\tan x = \tan x$

พิสูจน์ $\sin 2x - \cos 2x\cdot\tan x = \left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) - \left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)\tan x$

$= \left(\frac{2\tan x-(\tan x-\tan^3 x)}{1+\tan^2 x}\right)$

$= \frac{\tan x+\tan^3 x}{1+\tan^2 x}$

$= \frac{\tan x(1+\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}$

$\sin 2x - \cos 2x\cdot\tan x = \tan x$

5) $\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x + 2\sin x\cos x = \tan x+\cot x$

พิสูจน์ $\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x + 2\sin x\cos x=(1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x}+(1-\sin^2 x)\frac{\cos x}{\sin x}+2\sin x\cos x$

$= \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\cos x+\frac{\cos x}{\sin x} - \sin x\cos x+2\sin x\cos x$

$= \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x + 2\sin x\cos x = \tan x+\cot x$

เฉลยแบบฝึกหัด46-47

1. $\csc x\cos x = \cot x$

พิสูจน์ $\csc x\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \cot x$

2. $\cos x(\tan x + \cot x) = \csc x$

พิสูจน์ $\cos x(\tan x + \cot x) = \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$=\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$

$\cos x(\tan x + \cot x) = \csc x$

3. $(\sec x - 1)(\sec x + 1) = \tan^2 x$

พิสูจน์ $(\sec x - 1)(\sec x + 1) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

$(\sec x - 1)(\sec x + 1) = \tan^2 x$

4. $\sin^2 x(1+\cot^2 x) = 1$

พิสูจน์ $\sin^2 x(1+\cot^2 x) = \sin^2 x \csc^2 x$

$$= \sin^2 x \frac{1}{\sin^2 x} \quad = 1$$

$\sin^2 x(1+\cot^2 x) = 1$

5. $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

พิสูจน์ $\sec^4 x - \sec^2 x = \sec^2 x(\sec^2 x - 1)$

$$= (1 + \tan^2 x)\tan^2 x$$

$$= \tan^4 x + \tan^2 x$$

$\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

6. $\sin^2 x \cot^2 x + \tan^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos^2 x = 1$

7. $\sec x - \sec x \sin^2 x = \sec x(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{\cos x} . \cos^2 x = \cos x$

8. $2\sin^2 x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 1 = 1 - 2\cos^2 x$

9. $\tan^2 x - \cot^2 x = (\sec^2 x - 1) - (\csc^2 x - 1) = \sec^2 x - \csc^2 x$

10. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \sin^2\theta(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1) = \sin^2\theta(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}) = \sin^2\theta(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}) = \tan^2\theta \sin^2\theta$