Verifying Trigonometric Identities and trigonometric equation		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
ผลการเรียนรู้ พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติและแก้สมการตรีโกณมิติได้ Learning outcomes Prove the trigonometric functions,the inverse trigonometric functions. And solve trigonometric equation.		
จุดประสงค์ปลายทาง พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติได้ Intended destination Proving Trigonometric Identities		
ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwan		

Name .... Class. ....No.............

%%

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ(3) Trigonometric Identities and trigonometric equation

① Find tne trigonometric Identities

1) 2sinA cosB = ...

2) 2cosA sinB = ...

3) 2cosA cosB = ...

4) 2sinA sinB = ...

② Find tne trigonometric Identities

1) sinA + sinB = ...

2) sinA - sinB = ...

3) cosA + cosB = ...

4) cosA – cosB = ...

Example Verify the Identity

1. $\frac{2\sin 2x\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin 2x\sin x}$ =tan3x

solution

$\frac{2\sin 2x\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin 2x\sin x}$ =...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $\frac{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}$ = tan2x

solution

$\frac{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}=\frac{(\sin x+\sin 3x)-\sin 2x}{(\cos x+\cos 3x)-\cos 2x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.Given $A+B+C = 180^0$ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(ข้อแนะนำ $A+B+C = 180^0$, $A+B = 180^0 - C$, $\sin(A+B) = \sin(180^0 - C) = \sin C$

$\cos(A+B) = \cos(180^0 - C) = -\cos C$)

solution

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = [\sin 2A+\sin 2B]+ \sin 2C$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงแสดงว่า

1. $\frac{\sin 8\theta + \sin 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} = \tan 5\theta$
2. $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta = 4\cos\theta \sin 4\theta \cos 2\theta$
3. $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$
4. $\cos^2 A + \cos^2(60^0+A) + \cos^2(60^0-A) = \frac{3}{2}$
5. $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{1}{8}$
6. $\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$

เฉลยเอกสารหมายเลข 48

① ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $2\sin A\ \cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$

2) $2\cos A\ \sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$

3) $2\cos A\ \cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$

4) $2\sin A\ \sin B = \sin(A-B)-\sin(A+B)$

② ผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

2) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

3) $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

4) $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. $\frac{2\sin 2x\cos x - \sin x}{\cos x - 2\sin 2x\sin x} = \tan 3x$

พิสูจน์

$$\frac{2\sin 2x\cos x - \sin x}{\cos x - 2\sin 2x\sin x} = \frac{\sin 3x + \sin x - \sin x}{\cos x - (\cos x - \cos 3x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\frac{2\sin 2x\cos x - \sin x}{\cos x - 2\sin 2x\sin x} = \tan 3x$$

2. $\frac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$

พิสูจน์

$$\frac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \frac{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x}{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}$$

$$= \frac{2\sin 2x\cos x - \sin 2x}{2\cos 2x\cos x - \cos 2x}$$

$$= \frac{2\sin 2x(\cos x - 1)}{2\cos 2x(\cos x - 1)}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

3.กำหนดให้ $A+B+C = 180^0$ จงแสดงว่า $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(ข้อแนะนำ $A+B+C = 180^0$, $A+B = 180^0 - C$

$\sin(A+B) = \sin(180^0 - C) = \sin C$

$\cos(A+B) = \cos(180^0 - C) = -\cos C$)

พิสูจน์ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = [\sin 2A+\sin 2B]+\sin 2C$

$= [2\sin(A+B)\cos(A-B)]+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C[-\cos(A+B)]$

$=2\sin C[\cos(A-B) -\cos(A+B)]$

$=2\sin C 2\sin A\sin B$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

เฉลยแบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงแสดงว่า

1) $\dfrac{\sin 8\theta + \sin 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} = \dfrac{2\sin 5\theta \cos 3\theta}{2\cos 5\theta \cos 3\theta}$

$= \tan 5\theta$

2) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta + 2\sin 6\theta\cos\theta$

$= 2\cos\theta(\sin 2\theta + \sin 6\theta)$

$= 2\cos\theta 2\sin 4\theta\cos\theta$

$= 4\cos\theta \sin 4\theta\cos 2\theta$

3) $\dfrac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta} = \dfrac{2\sin 3\theta\cos 2\theta + \sin 3\theta}{2\cos 3\theta\cos 2\theta\cos 3\theta}$

$= \dfrac{\sin 3\theta(2\cos 2\theta + 1)}{\cos 3\theta(2\cos 2\theta + 1)}$

$= \tan 3\theta$

4) $\cos^2 A + \cos^2(60^0+A) + \cos^2(60^0-A) = \dfrac{1+\cos A}{2} + \dfrac{1+\cos 2(60^0+A)}{2} + \dfrac{1+\cos 2(60^0-A)}{2}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(\cos 2A + \cos(120^0+2A) + \cos(120^0-2A))$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(\cos 2A + 2\cos 120^0\cos 2A)$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(\cos 2A + 2\cos(-\dfrac{1}{2})\cos 2A$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2A)$

$= \dfrac{3}{2}$

5) $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0 = (\cos 20^0\cos 40^0)\cos 80^0$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 60^0 + \cos(-20^0))\cos 80^0$

$= \dfrac{1}{2}\cos 80^0\cos 60^0 + \dfrac{1}{2}\cos 80^0\cos 20^0$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^0 + \dfrac{1}{4}(\cos 100^0 + \cos 60^0)$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^0 - \dfrac{1}{4}\cos 80^0 + \dfrac{1}{4}\cos 60^0)$

$= \dfrac{1}{8}$

6. $\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0 = (\sin 20^0\sin 40^0)\sin 80^0$

$= \dfrac{1}{2}(\cos\text{-}20^0 - \cos 60^0)\sin 80^0$

$= \frac{1}{2} \sin 80^0 \cos 60^0 - \frac{1}{2} \sin 80^0 \cos 60^0$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} (\sin 100^0 + \sin 60^0) - \frac{1}{2} \sin 80^0 \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} \sin 100^0 + \frac{1}{4} \sin 60^0 - \frac{1}{4} \sin 80^0$

$= \frac{1}{4} \sin 60^0$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}$