

The Law of Cosines		
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	สาระที่ 4 พีชคณิต	วิชา ค32201 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
<p>ผลการเรียนรู้ นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์หาส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงได้</p> <p><u>Learning outcomes.</u> Apply the law of cosines and sines to solve oblique triangles, Solving problems with distance</p>		
<p>จุดประสงค์ปลายทาง นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติกฎของโคไซน์ไปใช้แก้ปัญหาได้</p> <p><u>Intended destination</u> Apply the law of cosines to solving problems.</p>		
<p>ครูผู้สอน นางมาลัยพร เอื้อสุวรรณ Instructor. Mrs. Malaiporn uasuwana</p>		

Name Class.No.....

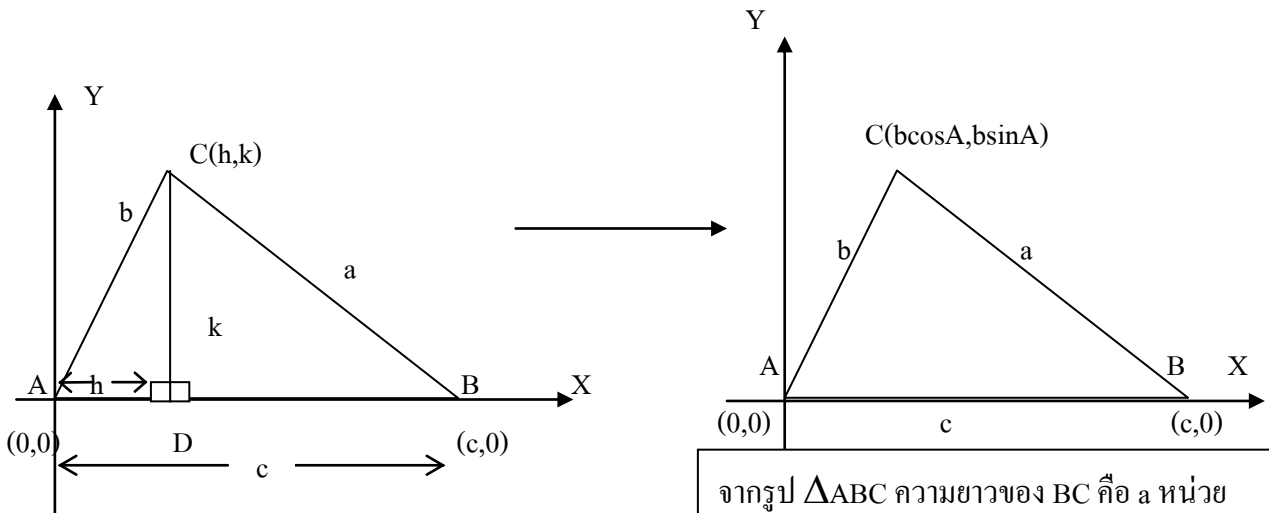
%%%%%%%%%

The Law of Cosines

1.กำหนด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ดังนั้นระยะทาง P_1 ถึง P_2 คือ $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2.สามเหลี่ยมใด ๆ กับอัตราส่วนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้มุม A ของ $\triangle ABC$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และมีด้านตรงข้าม มุม A มุม B และมุม C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ดังรูป



จากรูป ACD
 $\cos A = \frac{h}{b}$
 $h = b \cos A$
 $\sin A = \frac{k}{b}$

จากรูป $\triangle ABC$ ความยาวของ BC คือ a หน่วย

$$a = \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2}$$

$$a^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$

$$= (b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= b^2 (1) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{และ} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

สรุป กฎของโคไซน์

ใน $\triangle ABC$ ใดๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้าม มุม A, B และมุม C ตามลำดับจะได้

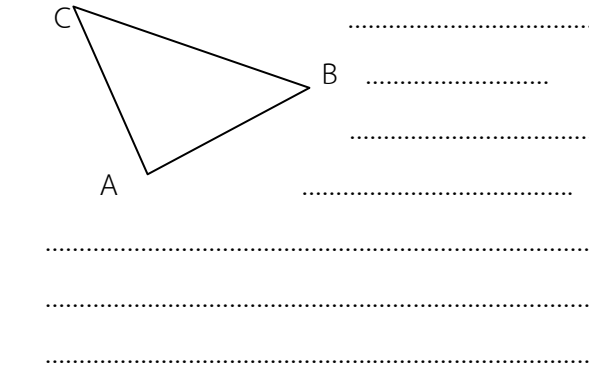
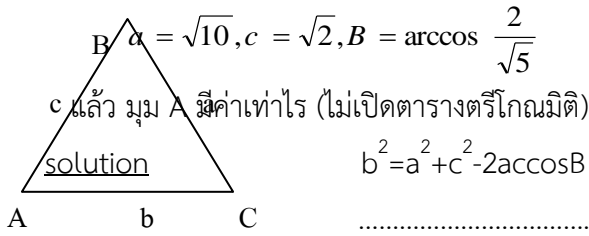
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad \cos B = \dots\dots\dots$$

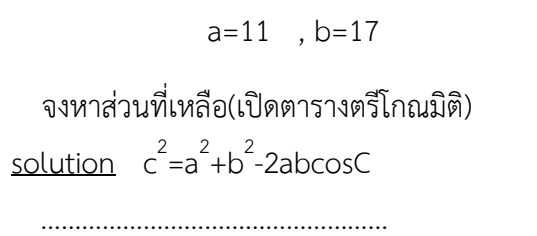
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad \cos C = \dots\dots\dots$$

$$k = b \sin A$$

Example 1 สามเหลี่ยม ABC



Example 2 สามเหลี่ยม ABC , มุม $C = 45^\circ$



1. จงใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาค่าต่อไปนี้ของรูปสามเหลี่ยม ABC

1) จงหาค่า c เมื่อกำหนดให้ $\hat{C} = 133^\circ$, $a = 193$ และ $b = 80$

2) จงหา \hat{B} เมื่อกำหนดให้ $a = 12$, $b = 7$ และ $c = 8$

2. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีขนาดของมุมๆหนึ่งเท่ากับ 135° องศา ด้านประกอบมุมนี้ยาว 5 และ 10 เซนติเมตร เส้นทแยงมุมเส้นสั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวเท่าไร

3. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว 24 และ 32 เซนติเมตร จงหามุมแหลมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ตัดกัน

เฉลยเอกสารหมายเลข 52

สรุป กฎของโคไซน์

ใน $\triangle ABC$ ใดๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้าม มุม A, B และมุม C ตามลำดับจะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

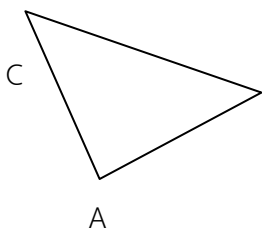
ตัวอย่างที่ 1 สามเหลี่ยม ABC

45° , $a = 11$

$a = \sqrt{10}, c = \sqrt{2}, B = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$

แล้ว มุม A มีค่าเท่าไร (ไม่เปิดตารางตรีโกณมิติ)

วิธีทำ



$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$

$B = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$

B แล้ว $\cos B = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$

$= 10 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2$

$= 12 - 8 = 4$

$b = 2$

ตัวอย่างที่ 2 สามเหลี่ยม ABC , มุม $C =$

$b = 17$ จงหาส่วนที่เหลือ (เปิดตารางตรีโกณมิติ)

วิธีทำ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$= 121 + 289 - 374 \cos 45^\circ$

$= 410 - 374(0.7071)$

$= 410 - 264.4554$

≈ 146

$c \approx 12.06$

$\cos B = \frac{121 + 145.54 - 280}{2(11)(12.06)} = \frac{-22.46}{265.32} = -0.08$

จะได้ $\cos 85^\circ 10' = 0.0844$, $B = 180^\circ - 85^\circ$

$$\cos A = \frac{4 + 2 - 10}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad A = 135^\circ \quad \therefore B = 94^\circ 50', \quad A = 180^\circ - 45^\circ - 94^\circ 50' = 40^\circ 10'$$

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.10

- 1 1) 254.34 2) $\approx 34^\circ$
- 2 7.36
- 3 $\approx 34^\circ$ หรือ $73^\circ 43' 48''$