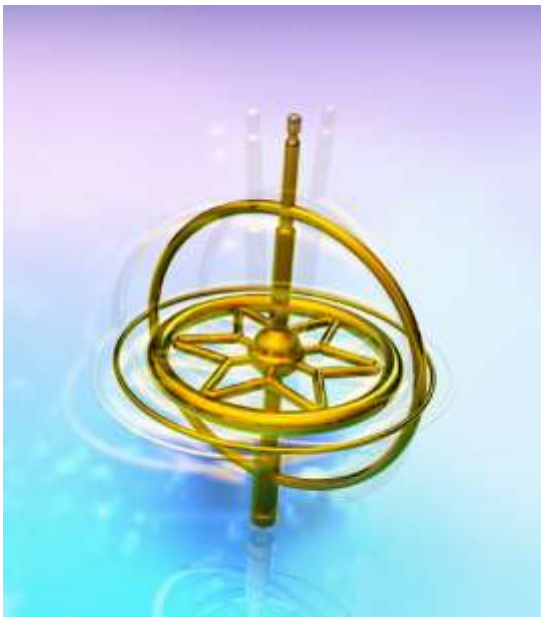
บทที่ 8
การหมุน



การเคลื่อนที่ของวัตถุตามสภาพจริงค่อนข้างซับซ้อน เนื่องเพราะขณะเคลื่อนที่วัตถุอาจเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ ตัวอย่างเช่น ยุบ แตก และร้าว ฯลฯ หรืออาจจะหมุนและเคลื่อนย้ายตำแหน่งไปพร้อมกัน บทที่ผ่านมาเราพยายามลดขนาดของวัตถุให้เป็นเพียงจุด เพื่อหลีกเลี่ยงผลเหล่านี้

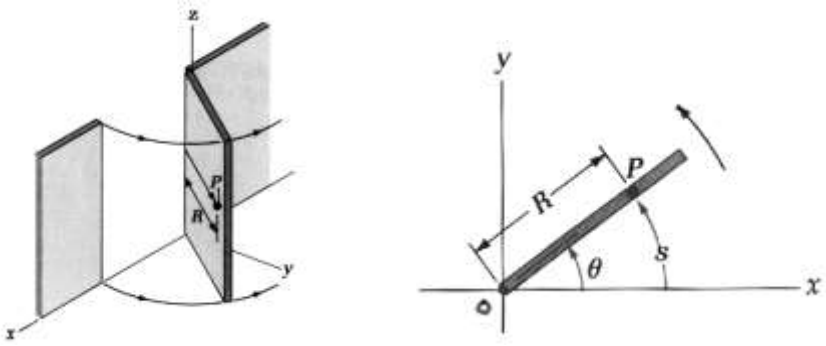
สำหรับบทนี้เราจะเริ่มต้นอธิบายการหมุนและการเลื่อนตำแหน่ง อย่างไรก็ตามยังจำกัดไม่ให้วัตถุเปลี่ยนรูปร่างขณะเคลื่อนที่ ซึ่งเราเรียกวัตถุแบบนี้ว่า **วัตถุแข็งเกร็ง** พร้อมกับเพิ่มแนวคิดใหม่ เช่น ทอร์ค, โมเมนต์ความเฉื่อย และโมเมนตัมเชิงมุม

ไจโรสโคปเป็นอุปกรณ์ที่น่าพิศวงงงงวยเป็นอย่างยิ่ง เพราะการหมุนของมันค่อนข้างแปลก และคล้ายกับว่า มันท้าท้ายกับแรงโน้มถ่วงได้ คุณสมบัติอันพิเศษนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ตั้งแต่รถจักรยาน จนถึงยานขนส่งอวกาศ เครื่องบินโดยสารทุกประเภทมีไจโรสโคป ไว้สำหรับทำเป็นเข็มทิศ และระบบนำร่องอัตโนมัติ สถานีอวกาศ Mir ของรัสเซีย ใช้ไจโรสโคปจำนวน 11 อัน เพื่อบังคับให้แผงโซลาร์เซลล์หันไปในทิศทางเดียวกับดวงอาทิตย์ตลอดเวลา การหมุนแบบไจโร จะเกิดกับมวลทุกชนิดในโลกที่มีการหมุน ฟิสิกส์ราชมงคลจะไขปริศนานี้ให้ โดยจะโยงให้คุณได้ทราบเหตุและผลที่เกิดจากการหมุนแบบนี้ ซึ่งจะทำให้คุณยิ่งมหัศจรรย์เพิ่มขึ้นไปอีก เพราะการประยุกต์ของไจโรมีมากมายนับไม่ถ้วน ทั้งๆ ที่ความรู้พื้นฐานนั้น ง่ายแสนจะง่าย กดที่นี่เพื่อดูรายละเอียดทั้งหมด

วีดีโอเพื่อการศึกษา

ดูวีดีโอการควงของล้อจักรยาน เป็นเวลา 30 วินาที คลิกที่นี่ครับ

8-1 ความเร็วเชิงมุม



รูป 8-1 a) เวลาเปิดประตูทุกอนุภาคบนประตูจะมีความเร็ว และความเร่งเชิงมุมเท่ากัน แต่ความเร็วและความเร่งเชิงเส้นแตกต่างกันขึ้นอยู่กับระยะที่ห่างจากแกนหมุน

b) ภาพด้านบนของบานประตู จุด P ห่างจากจุดหมุนเท่ากับ R เคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม S

พิจารณาวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบจุดคงที่หนึ่ง ดังรูป 8-1 เวลาเปิดบานประตู OP คือแนวเส้นบนขอบประตูที่เราจะศึกษาการเคลื่อนที่ θ คือมุมที่ทำกับระดับมีหน่วยเป็นเรเดียน **เรเดียนคือ ส่วนโค้งของวงกลมหารด้วยรัศมี** ดังนั้น 1 เรเดียน (rad) คือส่วนโค้งของวงกลม (S) ที่มีขนาดเท่ากับรัศมี

$$2\pi \text{ rad (1 รอบ)} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

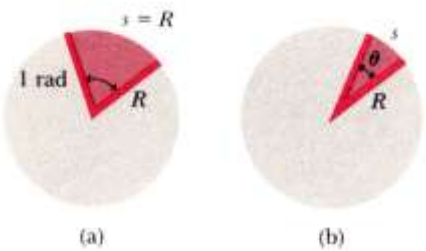
$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 6.28 \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad} = 3.14 \text{ rad}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1.57 \text{ rad}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 1.05 \text{ rad}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 0.79 \text{ rad}$$



รูป 8-2 R กับ S สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้ $S = R\theta$

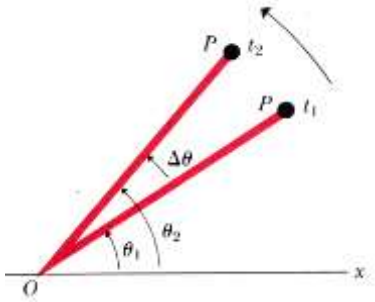
θ มีชื่อเรียกเฉพาะว่า **ตำแหน่งเชิงมุม (Angular position)** θ มีเครื่องหมายเป็นบวกเมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา และเป็นลบเมื่อวัดตามเข็มนาฬิกา

จากนิยามของตำแหน่งเชิงมุม

$$\theta = \frac{S}{R}; \quad S = R\theta \qquad \text{..... (8-1)}$$

ถ้า $\theta = 2\pi$ rad ก็แสดงว่า S คือเส้นรอบวงของวงกลม

เรเดียนเป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวต่อความยาว ดังนั้น จึงไม่มีหน่วย ถ้า S = 1.5 m และ R = 1 m จะได้มุม θ = 1.5 rad นิยมเขียน θ = 1.5 ไม่ต้องมีหน่วยกำกับก็เข้าใจ



รูป 8-3 ระยะกระจัดเชิงมุม $\Delta\theta$ ของวัตถุที่กำลังหมุน

การหมุนสามารถอธิบายได้ด้วยอัตราการเปลี่ยนระยะกระจัดต่อเวลา ดังรูป 8-3 ให้เวลา t ตำแหน่งเชิงมุมของแนวเส้น OP อยู่ที่ θ_1 วัดจากแกน OX เวลาผ่านไปเป็น t_2 ตำแหน่งเชิงมุมของแนวเส้น OP อยู่ที่ θ_2 ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย จะเป็น

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ความเร็วเชิงมุมชั่วขณะ เป็น

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{..... (8-2)}$$

หน่วยของความเร็วเชิงมุม คือ เรเดียนต่อวินาที (1 rad $\cdot s^{-1}$ หรือ 1 s^{-1}) บางครั้งนิยมใช้รอบต่อนาที (rev$\cdot$min^{-1}) rev เป็นตัวย่อของ revolution

1 rev$\cdot s^{-1}$ = 2π rad$\cdot s^{-1}$ และ

1 rev$\cdot$min^{-1} = 1 rpm = $(2\pi/60)$ rad$\cdot s^{-1}$

8-2 ความเร่งเชิงมุม

ถ้าความเร็วเชิงมุมไม่คงที่ แสดงว่าอนุภาคมีความเร่งเชิงมุม

ให้ ω_1 และ ω_2 เป็นความเร็วเชิงมุมชั่วขณะที่เวลา t_1 และ t_2

ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยจะเป็น

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ความเร่งเชิงมุมชั่วขณะจะเป็น

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{..... (8-3)}$$

หน่วยของความเร่งเชิงมุม คือ เรเดียนต่อวินาที^{2} (1 rad·s $^{-2}$ หรือ 1 s^{-2})

เพราะ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ความเร่งเชิงมุมจึงสามารถเขียนอยู่ในรูปของอนุพันธ์อันดับที่สองได้เป็น

$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{..... (8-4)}$$

เปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น

θ คือตำแหน่งเชิงมุม		x คือระยะกระจัดเชิงเส้น
ω คือความเร็วเชิงมุม	เปรียบเทียบกับ	v คือความเร็วเชิงเส้น
α คือความเร่งเชิงมุม		a คือความเร่งเชิงเส้น

8-3 การหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่

เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัดเชิงมุม อัตราเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมได้ในกรณีที่ความเร่งเชิงมุมคงที่ โดยใช้วิธีเดียวกันกับการหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัดเชิงเส้น ความเร็วเชิงเส้น และความเร่งเชิงเส้นในกรณีที่ความเร่งคงที่ ดังที่ได้วิเคราะห์มาแล้วในบทที่ 2

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{คงที่}$$

อินทิเกรตจะได้ $\int d\omega = \int \alpha dt$, $\omega = \alpha t + C_1$

C_1 เป็นค่าคงที่ที่ได้จากอินทิเกรต

ให้เวลาเริ่มต้น t = 0 อนุภาคมีความเร็วเชิงมุม ω_0 แทนค่าลงในสมการบน จะได้ $C_1 = \omega_0$

ดังนั้น $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ..... (8-5)

แทน $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ และอินทิเกรตอีกครั้งจะได้

$$\int d\theta = \int \omega_0\, dt + \int \alpha t dt, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_2$$

C_2 เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต

ให้เวลาเริ่มต้น t = 0 อนุภาคมีตำแหน่งเชิงมุม θ_0 แทนค่าลงในสมการบน จะได้ $C_2 = \theta_0$

ดังนั้น $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ..... (8-6)

จากสมการ (8-5) จะได้ $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$ แทนค่าลงไปในสมการ (8-6)

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ ..... (8-7)

ตาราง 8-1 เปรียบเทียบสูตรที่ได้จากสมการ (8-5) (8-6) และ (8-7) สำหรับการหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ กับสูตรที่ได้จากการเคลื่อนที่เชิงเส้นที่มีความเร่งคงที่

ตาราง 8-1

การเคลื่อนที่เชิงเส้นที่มีความเร่งคงที่	การหมุนที่มีความเร่งเชิงมุมคงที่
a = คงที่	α = คงที่
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

ตัวอย่าง 8-1 ล้อจักรยานหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ 2 rad·s^{-2} ให้เวลาเริ่มต้น t = 0 ซี่ล้อ OP อยู่ในแนวระดับ มีความเร็วเชิงมุม = 4 rad.s^{-1}

ก) ณ เวลา t = 3.0 s ซี่ล้อจะทำมุมกับแนวระดับเท่าไร

ข) ความเร็วเชิงมุม

หลักการคำนวณ

ก) จากสมการ (8-6)

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$t = 3.0\ s,\quad \theta = 0 + (4.0\ rad.s^{-1})(3.0\ s) + \frac{1}{2}(2.0\ rad\cdot s^{-2})(3.0\ s)^2$$

$$= 21\ rad = \frac{21}{2\pi}\ รอบ = 3.34\ รอบ$$

ซี่ล้อจะหมุนไป 3 รอบ บวกกับอีก 0.34 รอบ หรือ (0.34 รอบ)(2π rad·rev^{-1}) = 2.15 rad = 123°

ข) จากสมการ (8-5)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = 3.0\ s,\ \omega = 4.0\ rad\cdot s^{-1} + (2.0\ rad\cdot s^{-2})(3.0\ s) = 10\ rad\cdot s^{-1}$$

หรือใช้สมการ (8-7)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$= (4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 + 2(2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(21\ \text{rad})$$

$$\omega^2 = 100\ \text{rad}^2\cdot\text{s}^{-2}$$

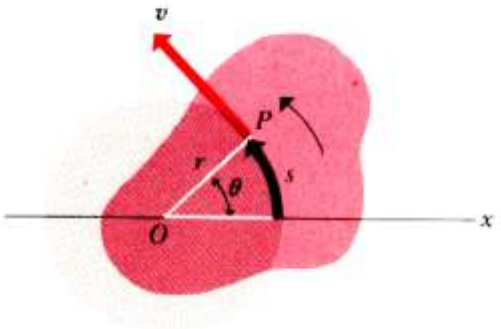
$$\omega = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

คำตอบเท่ากัน

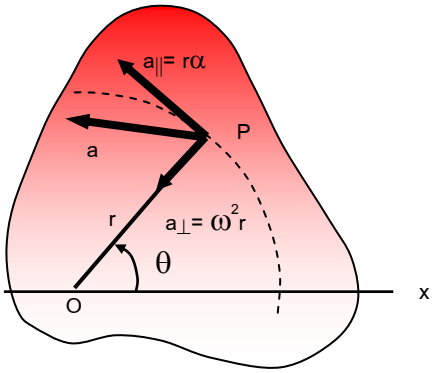
บทความออนไลน์

เมื่อแมวตกลงจากที่สูง มันมีความสามารถที่จะลงบนพื้นโดยใช้เท้าได้ ทั้งๆที่ตอนเริ่มต้นตกมันหงายท้องเก่งลงมา การถ่ายภาพความเร็วสูงเป็นช็อตๆ ในปัจจุบันช่วยให้เราเห็นขั้นตอนต่างๆ ขณะที่แมวกำลังตกลงมาได้ อ่านต่อครับ

8-4 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้นและการเคลื่อนที่เชิงมุมของอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลม



รูป 8-4 $S = r\theta$



รูป 8-5 ถ้าวัตถุหมุนด้วยความเร็วไม่สม่ำเสมอรอบจุด O จะเกิดความเร่งขึ้น 2 แนวคือ ความเร่งแนวสัมผัสที่จุด $P = r\alpha$; และแนวตั้งฉาก $= \omega^2 r$

จุด P ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ r เคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยมีตำแหน่งกระจัดเชิงมุมเริ่มต้นเท่ากับ θ เพิ่มขึ้นเป็น $\Delta\theta$ ในช่วงเวลา Δt อนุภาคที่จุด P จะเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม $\Delta s = r\Delta\theta$ อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาคหาได้จาก

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{..... (8-8)}$$

ให้ Δt เข้าใกล้ศูนย์ จะได้

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \qquad \text{..... (8-9)}$$

ความเร็ว v สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคที่เปลี่ยนไป Δv กับความเร็วเชิงมุมที่เปลี่ยนไป $\Delta\omega$ เขียนได้ดังนี้

$$\Delta v = r\Delta\omega$$

หาร Δt ทั้ง 2 ข้าง $\quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = r\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$

ให้ Δt เข้าใกล้ศูนย์จะได้

$$a_{||} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \text{..... (8-10)}$$

$a_{||}$ คือ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่

ความเร่งในแนวตั้งฉาก หรือรัศมี แทนด้วย $a_{\perp} = \frac{v^2}{r}$ จากสมการ (8-9) เขียนใหม่ได้เป็น

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{..... (8-11)}$$

ถ้าวัตถุหมุนด้วยความเร็วที่ไม่สม่ำเสมอรอบจุด O จะเกิดความเร่งขึ้น 2 แนว คือ $a_{||}$ กับ $a_{\perp}$ ความเร่งลัพธ์หาได้จาก

$$a = \sqrt{a_{\perp}^2 + a_{||}^2}$$

ตัวอย่าง 8-2 นักขว้างจานโอลิมปิคเหวี่ยงจานข้าวออกไปด้วยความเร่งเชิงมุม α = 50 rad·s^{-2} จงหาความเร่งแนวสัมผัสและตั้งฉากขณะที่ความเร็วเชิงมุม = 10 rad·s^{-1} กำหนดให้ แขนของนักขว้างยาว 0.80 m

หลักการคำนวณ จากสมการ (8-10) และ (8-11)

$a_{\perp} = \omega^2 r = (10 s^{-1})^2(0.80\ m) = 80\ m\cdot s^{-2}$

$a_{||} = r\alpha = (0.80\ m)(50 s^{-2}) = 40\ m\cdot s^{-2}$

ขนาดของความเร่ง

$$a = \sqrt{a_{\perp}^2 + a_{||}^2} = 89\ m\cdot s^{-2}$$

8-5 พลังงานจลน์ของการหมุน

ขณะที่วัตถุหมุน อนุภาคต่าง ๆ ที่ประกอบขึ้นเป็นวัตถุก็หมุนพร้อมไปกับวัตถุด้วย

สมมติให้อนุภาคตัวหนึ่งมวล m_i อยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะทาง r_i

ความเร็วเชิงเส้นของอนุภาคจะเป็น $v_i = \omega r_i$ และมีพลังงานจลน์เป็น

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

เนื่องจากพลังงานจลน์เป็นปริมาณสเกลาร์ พลังงานจลน์รวมของวัตถุจะเท่ากับผลรวมพลังงานจลน์ของแต่ละอนุภาค

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3 r_3^2\omega^2 + ...$$

อนุภาคภายในวัตถุก้อนเดียวกัน จะมี ω เท่ากัน จึงแยก ω ออกมาเป็นตัวร่วมได้

$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\omega^2$$

$\sum m_i r_i^2$ คือผลบวกมวลของอนุภาคคูณด้วยระยะทางกำลังสองจากมวลไปยังจุดหมุน ถ้าแทนด้วยปริมาณ I จะได้

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}12)$$

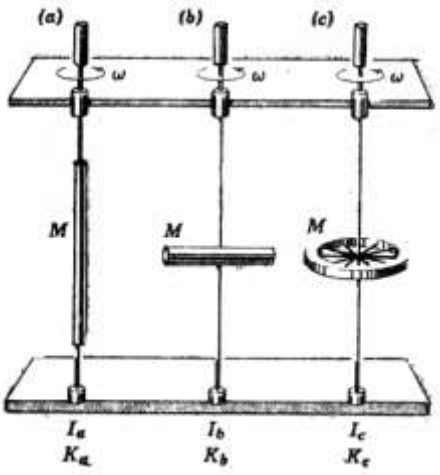
เรียกค่า I ว่าเป็นความเฉื่อยของการหมุน หรือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ สัมพัทธ์กับแกนหมุน ค่า I ของวัตถุจะขึ้นกับแกนหมุน รูปร่างของวัตถุ และลักษณะการเรียงตัวของวัตถุ รอบแกนหมุน มีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร^2 (kg·m^2)

ค่าพลังงานจลน์สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}13)$$

เปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น $K = \frac{1}{2}Mv^2$

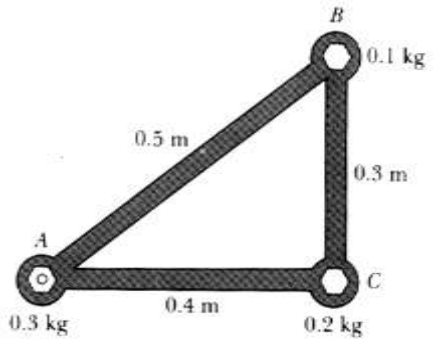
สมการ (8-12) และ (8-13) แสดงให้เห็นว่าพลังงานการหมุนของวัตถุ สำหรับความเร็วเชิงมุมค่าหนึ่ง ๆ นั้น ไม่เพียงแต่ขึ้นอยู่กับขนาดของมวลเท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับการกระจายของมวลนั้น ๆ รอบแกนหมุน ดังรูป 8-6 เส้นลวดอลูมิเนียมซึ่งมีขนาดเท่ากันและเหมือนกันทั้งสามเส้น แต่ละเส้นมีวัตถุมวล M ทำด้วยตะกั่วผูกติดอยู่ รูป (a) มวลอยู่ใกล้กับแกนหมุนมากที่สุด ดังนั้น ค่า r_i ในสมการ (8-12) จึงมีค่าน้อย ส่วนรูป (b) อนุภาคอยู่ห่างจากแกนหมุนแต่ยังน้อยกว่ารูป (c)



รูป 8-6 จากการทดลองพบว่า $I_a < I_b < I_c$ วัตถุตะกั่วทั้งสามมีมวลเท่ากัน แต่การกระจายของมวลรอบแกนหมุนต่างกัน

ให้มวลทั้งสามหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω เท่ากัน พบว่ารูป a ใช้งานน้อยที่สุด และรูป c ใช้งานมากที่สุด เนื่องจากงานที่ให้วัตถุแต่ละอันมีค่าเท่ากับพลังงานจลน์ $\frac{1}{2}I\omega^2$ ของวัตถุนั้น ๆ ทำให้ค่า $K_a < K_b < K_c$ และเนื่องจากแต่ละอันมีค่า ω เท่ากัน ดังนั้น ค่า $I_a < I_b < I_c$ จากนิยามของสมการ (8-13) จึงอาจเรียก M ว่าเป็นค่าความเฉื่อยเนื่องจากการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง (translational inertia) ซึ่งเป็นการวัดความต้านทานของวัตถุที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง และเรียก I ว่าเป็นความเฉื่อยเนื่องจากการหมุน (rotational inertia) ซึ่งเป็นการวัดความต้านทานของวัตถุที่มีต่อการหมุน

ตัวอย่าง 8-3 โมเมนต์ความเฉื่อยของส่วนประกอบชิ้นหนึ่งของเครื่องจักร ดังรูป 8-7 จะเป็นเท่าไร



รูป 8-7 ส่วนประกอบชิ้นหนึ่งของเครื่องจักร

(ก) รอบแกนหมุน A ตั้งได้ฉากกับระนาบ ABC

(ข) ให้ BC เป็นแกนหมุน

(ค) จากข้อ (ก) ถ้ามีความเร็วเชิงมุม ω = 40 rad·s^{-1} พลังงานจลน์การหมุนจะเป็นเท่าไร

หลักการคำนวณ

(ก) มวลที่จุด A อยู่ที่แกนหมุนพอดี ระยะจากจุดหมุนเป็นศูนย์ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่จุดนี้จึงเป็นศูนย์ จากสมการ (8-12)

$$I_A = \sum m_i r_i^2 = (0.10\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2$$
$$= 0.057\ \text{kg·m}^2$$

(ข) มวลที่จุด B และ C อยู่ที่แกนหมุนพอดี ระยะจากจุดหมุนเป็นศูนย์ โมเมนต์ความเฉื่อยบนแกนนี้จึงเป็นศูนย์ จากสมการ (8-12)

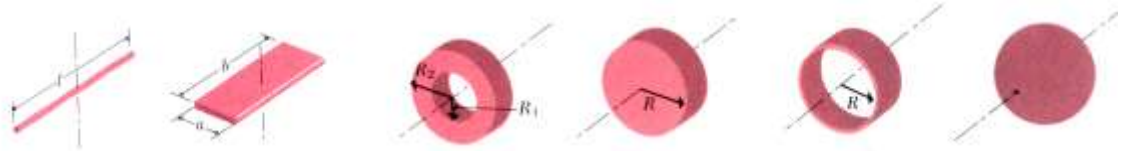
$$I_{BC} = \sum m_i r_i^2 = (0.30\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2$$
$$= 0.048\ \text{kg·m}^2$$

สรุปได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อยขึ้นอยู่กับแกนหมุน แกนหมุนเปลี่ยนค่าก็เปลี่ยน

(ค) จากสมการ (8-13)

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.057\ \text{kg·m}^2)(40\ \text{rad·s}^{-1})^2$$
$$= 45.6\ \text{J}$$

การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของตัวอย่างที่ผ่านมา มวลมีลักษณะเป็นจุด แต่ถ้าวัตถุมีรูปทรงขนาดใหญ่ มวลกระจายอย่างต่อเนื่องเช่นทรงกระบอกหรือจาน การหาโมเมนต์ความเฉื่อย จะต้องใช้วิธีการอินทิเกรต ตัวอย่างการคำนวณจะอธิบายในหัวข้อถัดไป รูป 8-8 คือตารางโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปทรงต่าง ๆ



$\frac{1}{12}ml^2$ $\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$ $\frac{1}{2}mR^2$ mR^2 $\frac{2}{5}mR^2$

รูป 8-8 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปทรงต่าง ๆ รอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ข้อสังเกต การหาโมเมนต์ความเฉื่อยโดยใช้มวลคูณกับระยะจุดศูนย์กลางมวลห่างจากจุดหมุน ยกกำลังสอง เพราะคิดว่าจุดศูนย์กลางมวลเป็นตัวแทนของมวลทั้งก้อน แต่จริง ๆ แล้วผิด ตัวอย่างเช่นแท่งกลมขนาดเล็กยาว L มีมวล M ให้จุดหมุนอยู่ที่ปลายของแท่งโลหะ โมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งโลหะที่จุดหมุนนี้ (จากตาราง) คือ $\frac{ML^2}{3}$ ถ้าใช้มวลคูณกับระยะจากจุดศูนย์กลางมวลถึงจุดหมุนซึ่งเท่ากับ $\frac{L}{2}$ สามารถคำนวณหา I ได้เท่ากับ $M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{4}$ ค่าที่ได้ไม่ตรงกัน **<u>การหาด้วยวิธีนี้จึงทำไม่ได้</u>**

ตัวอย่าง 8-4 ลูกรอกมวล 50 kg เส้นผ่าศูนย์กลาง 0.12 m หมุนอยู่รอบแกนได้โดยไม่มีความฝืด พันเชือกรอบลูกรอก ดึงปลายเชือกด้วยแรงคงที่ 9 N เป็นระยะ 2 m ถ้าลูกรอกเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง จงหาความเร็วเชิงมุมและเชิงเส้นของเชือกที่ระยะนี้

หลักการคำนวณ

พลังงานจลน์ของลูกรอกที่เพิ่มขึ้น = งานที่กระทำกับลูกรอก

$\frac{1}{2}I\omega^2$ = Fd

= (9.0 N)(2.0 m)

= 18 J

จากรูป 8-8 โมเมนต์ความเฉื่อยของลูกรอก

$I = \frac{1}{2}MR^2$

$= \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0.060\text{ m})^2$

$= 0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$

แทนลงไปในสมการบน จะได้

$\frac{1}{2}(0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\,\omega^2 = 18\text{ J}$

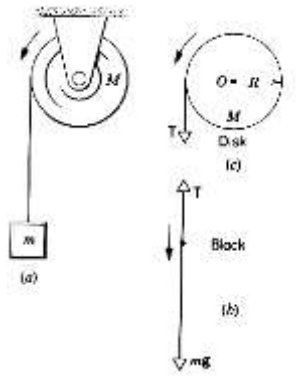
$$\omega = 20 \text{ rad·s}^{-1}$$

ความเร็วเชิงเส้นของเชือกจะเท่ากับความเร็วสัมผัสของลูกรอก จากสมการ (8-9)

$$v = r\omega = (0.060 \text{ m})(20 \text{ rad·s}^{-1})$$

$$= 1.2 \text{ m·s}^{-1}$$

ตัวอย่าง 8-5 ลูกรอกมวล M หมุนรอบแกนโดยไม่มีความฝืด พันเชือกรอบลูกรอก ให้ปลายเชือกข้างหนึ่งผูกติดกับมวล m ในแนวดิ่ง ปล่อยมวล m จากความสูง h จงหาความเร็วเชิงมุมและเชิงเส้นของลูกรอกขณะที่มวล m ถึงพื้น



รูป 8-9

หลักการคำนวณ

เริ่มต้นปล่อยมวล m พลังงานจลน์ยังเป็นศูนย์ ($K_1 = 0$) มีแต่พลังงานศักย์ $U_1 = mgh$ ขณะที่มวล m ถึงพื้น พลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้นเป็น K_2 พลังงานศักย์เป็นศูนย์ ($U_2 = 0$) แต่เนื่องจากลูกรอกหมุนจึงมีพลังงานจลน์ของการหมุนบวกเพิ่มเข้ามา

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{..... (8-14)}$$

จากรูป 8-8 โมเมนต์ความเฉื่อยของลูกรอก

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

จาก $\theta = R\omega$ ความเร็วเชิงเส้นของมวล m จะเท่ากับความเร็วสัมผัสของลูกรอก
จากกฎการคงตัวของพลังงาน จะได้

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{M}{2m}}}$$

วิเคราะห์โจทย์

ถ้ามวลของลูกรอก M มากกว่า m มาก ๆ v จะมีค่าน้อย ในทางกลับกัน M น้อยกว่า m มาก ๆ v ของมวล m จะเกือบเท่ากับความเร็วของการตกอย่างอิสระที่ระยะความสูง h ดังนั้นโจทย์ที่มีรอกประกอบจากบทที่ผ่านมา จึงต้องกำหนดให้มวลของรอกน้อยมาก เพื่อหลีกเลี่ยงผลของการหมุนนั่นเอง

8-6 วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย

$I = \Sigma m_i r_i^2$ เป็นสมการที่หาโมเมนต์ความเฉื่อยในกรณีที่มวลเป็นจุด ดังตัวอย่าง 8-3 แต่ถ้ามวลมีรูปทรงขนาดใหญ่ และเนื้อวัตถุกระจายอย่างสม่ำเสมอ จะต้องใช้วิธีการอินทิกรัลแทน โดยแบ่งมวลของวัตถุออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ มีค่า dm อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r โมเมนต์ความเฉื่อยของอนุภาคเล็กๆ นี้จะเป็น

$$dI = r^2 dm$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทั้งก้อน

$$I = \int r^2 dm \quad \text{..... (8-15)}$$

ถ้า ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ และ dV เป็นปริมาตรเล็ก

$dm = \rho dV$ แทนในสมการบน จะได้

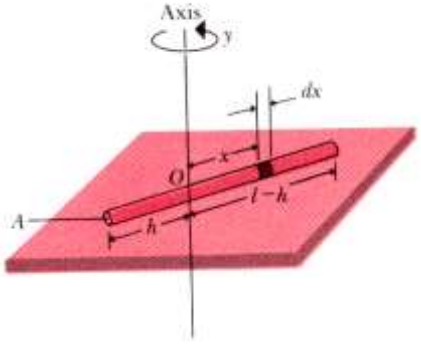
$$I = \int r^2 \rho dV$$

การกระจายของมวลเป็นเนื้อเดียวสม่ำเสมอ ความหนาแน่นจะคงที่ สามารถนำออกนอกเครื่องหมายอินทิกรัลได้

$$I = \rho \int r^2 dV \quad \text{..... (8-16)}$$

dV คือปริมาตรเล็ก ๆ ของมวล dm จึงมีลักษณะเหมือนจุด

ตัวอย่าง 8-6



รูป 8-10 วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งกลมขนาดเล็ก ส่วนที่แรเงาคือมวล dm เล็ก ๆ ที่แบ่งในช่วง dx

แท่งกลมขนาดเล็ก มวล M ยาว ℓ เนื้อวัตถุกระจายสม่ำเสมอ แกนหมุนตั้งฉากกับจุด O ห่างจากปลายแท่งข้างหนึ่งเป็นระยะ h แบ่งแท่งกลมเป็นช่วงเล็ก ๆ dx ห่างจากจุด O เป็นระยะ x อัตราส่วนของมวลก้อนเล็ก ๆ dm ต่อมวลทั้งก้อน M จะเท่ากับ อัตราส่วนของ dx กับความยาวทั้งหมด ℓ ดังนี้

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{\ell}$$

$$dm = \frac{Mdx}{\ell}$$

แทนค่า dm ลงในสมการ (8-15) และอินทิเกรตบนแกน x จาก -h ถึง ℓ -h ดังนี้

$$I_0 = \int x^2 dm$$

$$= \frac{M}{\ell}\int_{-h}^{\ell - h} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{\ell}\frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{\ell-h}$$

$$= \frac{1}{3}M(\ell^2 - 3\ell h + 3h^2)$$

สมการบนที่ได้ สามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนได้ทุก ๆ แกน ตัวอย่างเช่น
ถ้าแกนหมุนอยู่ที่ปลายแท่งด้านซ้าย, h = 0 จะได้

$$I = \frac{1}{3}M\ell^2 \qquad \text{..... (8-17)}$$

แกนหมุนอยู่ที่ปลายแท่งด้านขวา , h = ℓ จะได้

$$I = \frac{1}{3}M\ell^2$$

เท่ากันเพราะมวลมีลักษณะสมมาตร ทั้งซ้ายขวา

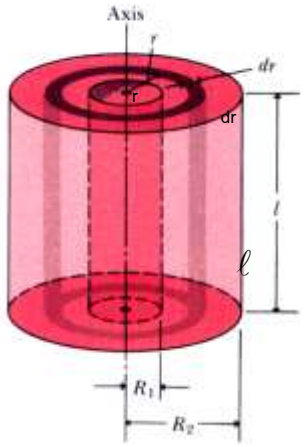
ถ้าแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวล h = ℓ/2

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 \qquad \text{..... (8-18)}$$

ตรงกับรูป 8-8

ตัวอย่าง 8-7 ทรงกระบอกกลวง ยาว ℓ มีเส้นผ่าศูนย์กลางในและนอกเป็น R_1 และ R_2 ตามลำดับ ให้แกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอก แบ่งปริมาตรของทรงกระบอกกลวงเป็นเปลือกเล็ก ๆ dV ห่างจากแกนหมุนเป็นรัศมี r หนา dr ยาว ℓ (บริเวณแรเงาในรูปภาพ) ปริมาตรของเปลือกเล็ก ๆ dV = $2\pi r\ell dr$ มวลของเปลือกเล็ก ๆ dm = ρdV = $2\pi\rho\ell rdr$

หลักการคำนวณ



รูป 8-11 วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกกลวง ส่วนที่แรเงาคือปริมาตรของเปลือกเล็ก ๆ $dV = 2\pi r\ell dr$

แทนค่า dm ในสมการ (8-15) และอินทิเกรตในแนวรัศมีจาก R_1 ถึง R_2 ดังนี้

$$I = \rho\int r^2 dV$$

$$= 2\pi\rho\ell \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$= \frac{\pi\rho\ell}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

$$= \frac{\pi\rho\ell}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) \quad \text{..... (8-19)}$$

ปริมาตรทั้งหมดของทรงกระบอก $V = \pi\ell(R_2^2 - R_1^2)$

มวลทั้งหมดของทรงกระบอก $M = \pi\ell\rho(R_2^2 - R_1^2)$

แทน $\pi\ell\rho(R_2^2 - R_1^2)$ ด้วย M ลงในสมการ (8-19) จะได้

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad \text{..... (8-20)}$$

ถ้าเป็นทรงกระบอกตัน $R_1 = 0$ ให้ $R_2 = R$ ดังนั้น

ตรงกับรูป 8-8

โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกตัน รัศมี $R = \frac{1}{2}MR^2$ ..... (8-21)

ตรงกับรูป 8-8

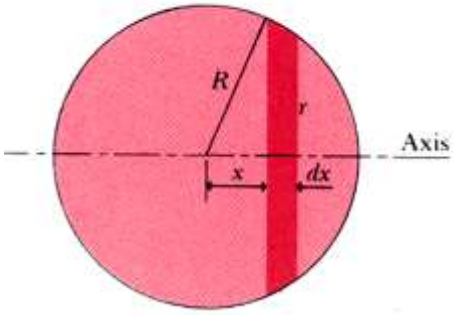
หรือถ้าเป็นทรงกระบอกกลวงบาง R_1 และ R_2 เกือบจะเท่ากัน ให้แทน $R_1 = R_2 = R$

$$I = MR^2$$

ตรงกับรูป 8-8

ข้อสังเกต โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกไม่ว่าจะกลวงหรือตัน ไม่ขึ้นอยู่กับความยาว ℓ ตัวอย่างเช่น ทรงกระบอกที่ทำจากไม้หรือทองเหลืองมีมวลเท่ากัน ถ้ามีรัศมีนอก และในเท่ากัน จะมี I เท่ากันด้วย ถึงแม้ว่าจะมีความยาวไม่เท่ากันก็ตาม สรุปได้ว่าโมเมนต์ความเฉื่อยขึ้นอยู่กับการกระจายของมวลแนวรัศมีรอบแกนหมุน ไม่ใช่แนวเดียวกับแกนหมุน

ตัวอย่าง 8-8



รูป 8-12 วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลม ; ส่วนที่แรเงาคือ ปริมาตรของจานหนา dx

ทรงกลมรัศมี R ให้แกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวล
แบ่งปริมาตรของทรงกลมให้เป็นรูปจานหนา dx รัศมี r ดังรูป 8-12

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

ปริมาตรของจาน คือ

$$dV = \pi r^2 dx = \pi (R^2 - x^2)dx ;$$

มวลของจาน คือ

$$dm = \rho dV$$

จากรูป 8-8 โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกตัน รัศมี R = $\frac{1}{2}MR^2$
นำมาใช้กับจานได้ **<u>จากข้อสังเกตในตัวอย่าง 8-7</u>**
ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อยของจาน คือ

$$dI = \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2 dx$$

อินทิเกรต จาก O ถึง R ได้ดังนี้

$$I = \frac{(2)\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$

หลังจากอินทิเกรตจะได้

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

มวลทั้งหมดของทรงกลม

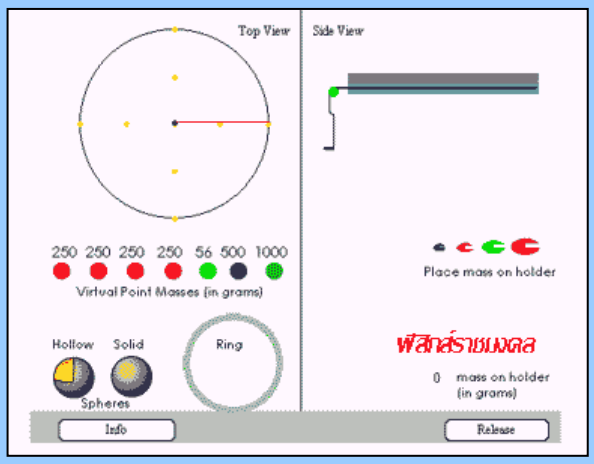
$$M = \rho v = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

แทนลงในสมการบนจะได้

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

ตรงกับรูป 8-8

การทดลองเสมือนจริง



การทดลองนี้เป็นการหาโมเมนต์ความเฉื่อยโดยการหมุนมวล คุณสามารถวางมวลบนกลางโต๊ะ หรือมุมของโต๊ะก็ย่อมได้ และทำการทดลองหาความเร่งของระบบ เมื่อได้ความเร่งแล้ว นำไปหาโมเมนต์ความเฉื่อยได้จากสูตร

$$I_{\text{ลูกกลิ้ง}} = \frac{m(g-a)R^2}{a}$$

m = มวลที่ใช้แขวนในระบบ R = คือรัศมีของโต๊ะหมุน ในห้องทดลองเสมือนจริงนี้ R = 0.25 เมตร เมื่อคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยได้แล้ว ให้นำค่า 0.03 $kg.m^2$ ซึ่งก็คือโมเมนต์ความเฉื่อยของโต๊ะ ลบออก ค่าที่ได้ก็คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่นำไปหมุน กดที่รูปภาพหรือที่นี่เพื่อเข้าสู่การทดลอง

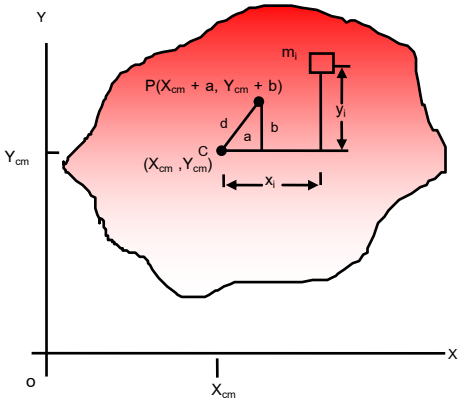
8-7 ทฤษฎีแกนขนาน

รูป 8-8 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่าง ๆ รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล แทนด้วย I_{cm} แต่ถ้าเราต้องการหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนใหม่ที่ขนานกับแกนหมุนเดิมเป็นระยะ d ก็สามารถคำนวณหาได้ โดยใช้ทฤษฎีของสไตเนอร์ (steiner's theorem) หรือทฤษฎีแกนขนาน (parallel axis theorem) ซึ่งเขียนเป็นรูปของสมการได้ว่า

$$I = I_{cm} + Md^2 \qquad \text{..... (8-22)}$$

I_{cm} คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมวล M รอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและห่างเป็นระยะ d



รูป 8-13 การพิสูจน์ทฤษฎีแกนขนาน ถ้าทราบค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยที่ผ่านจุด C ก็จะสามารถหาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยที่ผ่านจุด P ได้

การพิสูจน์หาความสัมพันธ์ของสมการ (8-22) เราจะกำหนดให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปใด ๆ มีพื้นที่ภาคตัดขวางดังรูป 8-13 มีพิกัดที่ (x_{cm} , y_{cm} , z_{cm} = 0) ให้แกนหมุนที่ผ่านจุด C มีทิศตั้งฉากกับระนาบของกระดาษและแกนหมุนที่จุด P ซึ่งมีแกนขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล P จะมีจุดพิกัดอยู่ที่ (x_{cm}+a ; y_{cm}+b , z_{cm} = 0) และระยะระหว่างแกนทั้งสองมีค่า d ซึ่งเท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$ อนุภาคมวล m_i อยู่ห่างจากจุด C = $\sqrt{x_i^2+y_i^2}$ และจุด P = $\sqrt{(x_i-a)^2+(y_i-b)^2}$ ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุด P มีค่าเท่ากัน

$$I = \Sigma m_i \{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\}$$

$$= \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a\Sigma m_i x_i - 2b\Sigma m_i y_i + (a^2 + b^2)\Sigma m_i$$

เนื่องจาก ค่า x_{cm} และ y_{cm} เป็น 0 เพราะเป็นจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น

$$\Sigma m_i x_i = x_{cm}\Sigma m_i = 0$$

$$\Sigma m_i y_i = y_{cm}\Sigma m_i = 0$$

$$I = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2)\Sigma m_i$$

$$I = I_{cm} + Md^2$$

พิสูจน์สมการ (8-22) ตามต้องการ

ตัวอย่าง 8-9 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งกลม ให้แกนหมุนอยู่ที่ปลายแท่ง

หลักการคำนวณ จากรูป 8-10 แกนหมุนอยู่ที่ปลายแท่ง $I = \frac{1}{3}M\ell^2$ ซึ่งได้มาจากการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามเราสามารถใช้สมการ (8-22) ได้โดยไม่ต้องผ่านการอินทิเกรตก็ได้

จากรูป 8-8 $I_{cm} = \frac{M\ell^2}{12}$ และ $d = \frac{\ell}{2}$ แทนลงในสมการ (8-22) จะได้

$$I = \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{M\ell^2}{3}$$

ตัวอย่าง 8-10 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของจานบางสม่ำเสมอ แกนหมุนอยู่ในแนวตั้งฉากกับขอบจาน

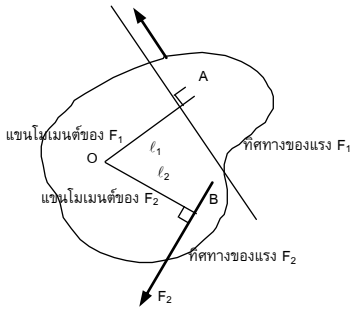
หลักการคำนวณ $I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$ และ d = R ดังนั้น

$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$= \frac{3MR^2}{2}$$

8-8 ทอร์ค

ทอร์ค คือแรงที่กระทำให้วัตถุหมุน ขึ้นอยู่กับขนาดของแรงและตำแหน่งที่แรงกระทำ ตัวอย่างเช่น มันง่ายกว่ากันมากที่จะออกแรงผลักประตูที่ลูกบิดมากกว่าที่บานพับ



รูป 8-14 แรง F_1 และ F_2 กระทำบนระนาบของวัตถุ ทำให้วัตถุหมุนได้รอบจุด O

ในรูป 8-14 แรง F_1 ทำให้วัตถุหมุนรอบแกน O อัตราการหมุนจะขึ้นอยู่กับขนาดของแรง F_1 และระยะที่ตั้งฉากกับแรง ℓ_1 แต่ถ้า $\ell_1 = 0$ วัตถุจะไม่มีการหมุน ระยะ ℓ_1 เปรียบเทียบได้กับด้ามจับของประแจเราสามารถขันน็อตด้วยประแจที่มีด้ามยาวได้ง่ายกว่าด้ามที่มีขนาดสั้น ระยะ ℓ_1 จึงมีชื่อเรียกว่า แขนโมเมนต์ของแรง F_1 และ F_1 ℓ_1 เรียกว่า ทอร์คหรือโมเมนต์ของแรงรอบจุด O แทนด้วยอักษรกรีก Γ (แกมม่า)

$$\Gamma = F\ell \quad \text{..... (8-23)}$$

แขนของโมเมนต์ F_1 คือ ระยะที่ลากจากจุดหมุนตั้งฉากกับแรง F_1 แทนด้วย ℓ_1

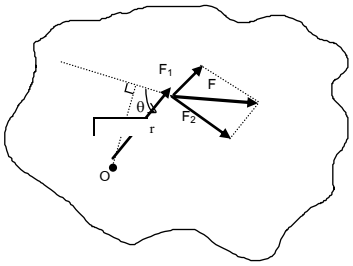
แขนของโมเมนต์ F_2 คือ ระยะที่ลากจากจุดหมุนตั้งฉากกับแรง F_2 แทนด้วย ℓ_2

แรง F_1 ทำให้วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิการอบจุด O ขณะที่แรง F_2 ทำให้วัตถุหมุนตามเข็มนาฬิการอบจุด O ถ้ากำหนดให้ทอร์คหมุนทวนเข็มเป็นบวก และตามเข็มเป็นลบ ดังนั้น

$$\Gamma_1 = +F_1\ell_1$$

และ $$\Gamma_2 = -F_2\ell_2$$

ถ้าแรงที่กระทำผ่านแกนหมุน แขนของโมเมนต์จะเป็นศูนย์ ทอร์คก็จะเป็นศูนย์ด้วย หน่วยของทอร์คคือ นิวตัน-เมตร (N·m)



รูป 8-15 $\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ รูปนี้ทิศทางของ Γ ชี้ลงไปในกระดาษ

แรง F สามารถแตกออกเป็น 2 แนว คือ F_1 ในแนวขนานกับ r และ F_2 ในแนวตั้งฉากกับ r ; $F_1 = F\cos\theta$ ไม่เกิดทอร์ค เพราะแขนโมเมนต์ผ่านจุดหมุน ส่วน $F_2 = F\sin\theta$ ทำให้เกิดทอร์ค ขนาดของ $\Gamma = rF_2 = rF\sin\theta$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการทางเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{..... (8-24)}$$

$r\sin\theta = \ell$ ดังนั้น ขนาดของ Γ เท่ากับ $F\ell$ จากรูป 8-15 ทอร์คมีทิศชี้ลงไปในกระดาษ ซึ่งเราสามารถหาได้จากกฎของมือขวา

8-9 ทอร์คและความเร่งเชิงมุม

ให้อนุภาคมวล m อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r แรงสุทธิที่กระทำต่ออนุภาคเท่ากับ F แยกออกเป็น 2 แรงคือ $F_\perp$ ในแนวตั้งฉาก หรือรัศมี และ $F_\parallel$ สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$F_\parallel = ma_\parallel \quad \text{..... (8-25)}$$

จากสมการ (8-10) $a_\parallel = r\alpha$ แทนลงในสมการ (8-25) คูณสมการทั้ง 2 ข้างด้วย r จะได้

$$F_\parallel r = mr^2\alpha \quad \text{..... (8-26)}$$

$F_\parallel r$ คือทอร์ค และ mr^2 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของอนุภาค เขียนใหม่ได้เป็น

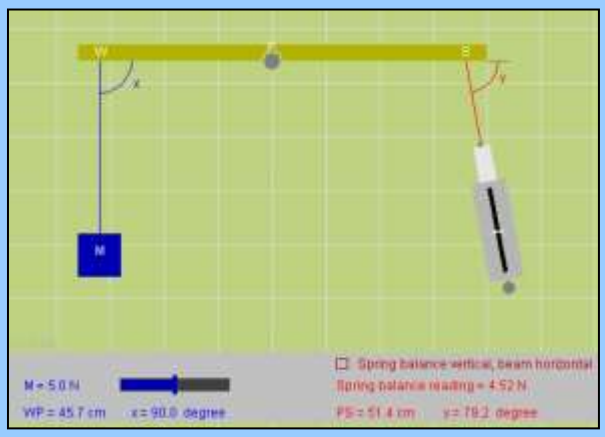
$$\Gamma = I_{\text{อนุภาค}}\alpha$$

สมการบนเป็นทอร์คของอนุภาคเพียงตัวเดียว ถ้าต้องการหา Γ ของอนุภาคทุกตัวบนวัตถุก็ต้องบวกทอร์คของแต่ละอนุภาค ซึ่งแต่ละอนุภาคที่อยู่ในวัตถุแข็งเกร็งเดียวกันจะมีความเร่งเชิงมุม α เท่ากันหมด ดังนั้นทอร์ครวมจะได้ว่า

$$\Sigma\Gamma = I_{\text{วัตถุ}}\alpha \quad \text{..... (8-27)}$$

$\Sigma\Gamma$ คือ ทอร์ครวมที่เกิดจากแรงกระทำจากภายนอก ส่วนทอร์คที่เกิดจากแรงภายในจะหักล้างกันหมด เพราะเป็นแรงคู่กิริยาและปฏิกิริยา สมการ (8-27) ใช้สำหรับกรณีของการหมุน ซึ่งที่จริงก็มาจากกฎข้อที่สองของนิวตัน $\Sigma F = ma$ รูปลักษณะของสมการจึงคล้าย ๆ กัน

การทดลองเสมือนจริง



การทดลองเรื่องทอร์ค [กดที่รูปภาพหรือที่นี่เพื่อเข้าสู่การทดลอง]

ตัวอย่าง 8-11 ลูกกลิ้งมวล 50 kg รัศมี 0.1 m หมุนรอบแกนได้โดยไม่มีความฝืด พันเชือกรอบลูกกลิ้งทรงกระบอกตัน จงหาความเร่งเชิงมุม เมื่อดึงปลายเชือกด้วยแรงคงที่ 20 N

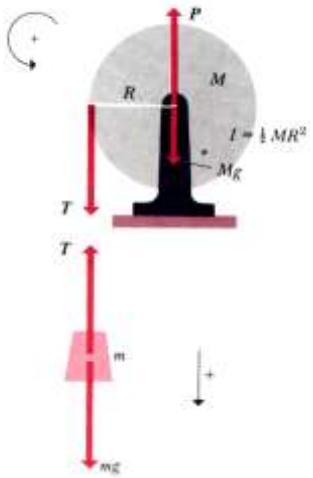
หลักการคำนวณ Γ = (20 N)(0.1 m)

= 2.0 N·m

ความเร่งเชิงมุม $\alpha = \dfrac{\Gamma}{I}$

$= \dfrac{2.0\ \text{N}\cdot\text{m}}{\frac{1}{2}(50\ \text{kg})(0.1\,\text{m})^2} = 8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$

ตัวอย่าง 8-12 จงหาความเร่งของมวล m และความเร่งเชิงมุมของลูกกลิ้ง



รูป 8-16 แผนภาพแทนแรงของตัวอย่าง 8-12

หลักการคำนวณ

เขียนแผนภาพแทนแรงของวัตถุทั้งสองอิสระจากกัน ดังรูป 8-16

จากกฎข้อที่สอง

$mg - T = ma$

จากสมการ (8-27) จะได้

$RT = I_{\text{ลูกกลิ้ง}}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

ความเร็วลงของมวลจะเท่ากับความเร็วแนวเส้นสัมผัสของลูกกลิ้ง เช่นเดียวกัน ความเร่งของมวล m ก็จะเท่ากับ ความเร่งแนวเส้นสัมผัสของลูกกลิ้ง จากสมการ (8-10) จะได้ $a_{||} = R\alpha$ แทนลงไปในสมการที่สอง จะได้ $RT = \frac{1}{2}MRa_{||}$, $T = Ma_{||}$ แทนลงไปในสมการแรกจะได้

$$mg - \frac{1}{2}Ma = ma$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

$$= \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

ข้อสังเกต แรงตึง T จะไม่เท่ากับน้ำหนัก mg และความเร่ง a ก็น้อยกว่า g
แต่ถ้า M = 0 , T = 0 และ a = g มวล m จะตกลงมาแบบอิสระ

มวล m เริ่มตกจากที่ระดับความสูง h ความเร็ว v หาได้จากสมการ

$$v^2 - v_0^2 = 2ah$$

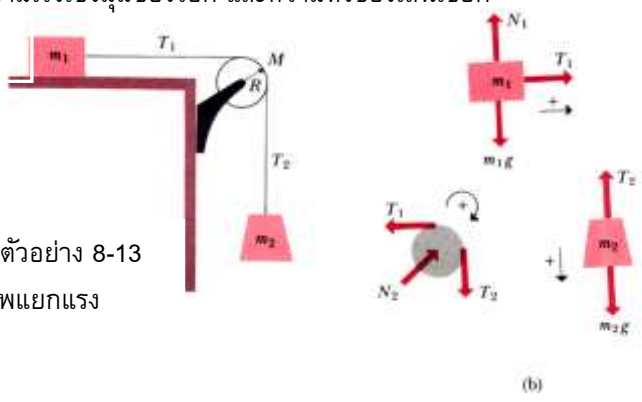
กรณีนี้ ความเร็วต้น v_0 = 0 จะได้

$$v = \sqrt{2ah}$$

$$= \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{M}{2m}}}$$

เท่ากับตัวอย่างที่ 8-5

ตัวอย่าง 8-13 มวล m_1 คล้องผ่านรอกผูกติดเข้ากับมวล m_2 ทำให้มวล m_1 ไถลไปบนพื้นที่ไม่มีแรงเสียดทาน กำหนดให้รอกทำจากทรงกระบอกกลวงบางมีมวล M รัศมี R ขณะหมุนเชือกไม่ไถล จงหาความเร่งของมวลแต่ละก้อน ความเร่งเชิงมุมของรอก และความตึงของเส้นเชือก



รูป 8-17 (a) ระบบในตัวอย่าง 8-13
(b) แผนภาพแยกแรง

หลักการคำนวณ

รูป 8-17 (b) ใส่แรงทุกแรง ตั้งแกนพิกัดและกำหนดทิศทางบนมวลแต่ละก้อนให้ครบ สังเกตว่า T_1 และ T_2 ไม่เท่ากัน แม้จะเป็นเส้นเชือกเส้นเดียวกัน เหตุผลเนื่องจากรอกมีมวล

จากกฎข้อที่สอง สมการการเคลื่อนที่บนมวล m_1 และ m_2

$$T_1 = m_1a_1 \quad \text{..... (8-28)}$$

และ $$m_2g - T_2 = m_2a_2 \quad \text{..... (8-29)}$$

แรงปฏิกิริยา N_2 กระทำผ่านจุดศูนย์กลางมวลของรอก ดังนั้น จึงไม่มีทอร์คเกิดขึ้น สมการการเคลื่อนที่แบบหมุนบนรอกก็คือ

$$T_2R - T_1R = I\alpha = (MR^2)\alpha \quad \text{..... (8-30)}$$

เพราะเชือกไม่ลื่นไถล ดังนั้น

$$a_1 = a_2 = R\alpha \quad \text{..... (8-31)}$$

แทนลงในสมการ (8-30) จะได้

$$T_2R - T_1R = MRa_1$$

จากสมการ (8-29) และ (8-30)

$$\left.\begin{aligned} T_2 - T_1 &= Ma_1 \\ T_1 &= m_1a_1 \\ mg - T_2 &= m_2a_1 \end{aligned}\right\} \text{ 3 สมการ 3 ตัวแปร}$$

จากสมการทั้ง 3 มีตัวแปร 3 ตัว จำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรจึงสามารถแก้สมการหา T_1 , T_2 และ a_1 ได้ดังนี้

$$a_1 = \frac{m_2g}{m_1 + m_2 + M}$$

แทนค่ากลับลงไปในสมการ (8-28) และ (8-29) จะได้

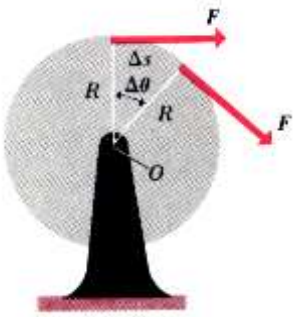
$$T_1 = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2 + M}$$

$$T_2 = \frac{(m_1 + M)m_2g}{m_1 + m_2 + M}$$

วิเคราะห์โจทย์

ถ้ามวล m_1 หรือ M มวลใดมวลหนึ่งมากกว่า m_2 มาก ๆ ความเร่งจะมีค่าน้อย และ T_2 ก็จะมีขนาดเกือบเท่า m_2g ในทางกลับกันถ้า m_2 มากกว่า m_1 หรือ M มวลใดมวลหนึ่งมาก ๆ ความเร่งของ m_2 เกือบจะเท่ากับ g หรือเหมือนกับการตกแบบอิสระ

8-10 งานและกำลังของการหมุน



รูป 8-18 งานของลูกกลิ้งที่เกิดจากการกระทำของแรง F

แรง F ทำให้ลูกกลิ้งรัศมี R เคลื่อนที่ได้ระยะกระจัดเชิงมุม $\Delta\theta$ ถ้ามุมนี้มีขนาดเล็กมาก ๆ แรงจะคงที่ในช่วงเวลาสั้น ๆ งานที่ทำโดยแรง F คือ

$$dW = Fds$$

แต่ $ds = Rd\theta$ ดังนั้น

$$dW = FRd\theta$$

FR คือทอร์ค (Γ) แทนลงไปเราจะได้

$$dW = \Gamma d\theta \quad \text{..... (8-32)}$$

ให้ทอร์คคงที่ระหว่างที่ลูกกลิ้งหมุนจาก θ_1 ไป θ_2 จะได้

$$W = \Gamma(\theta_2 - \theta_1) = \Gamma\Delta\theta \quad \text{..... (8-33)}$$

สรุปได้ว่า งานที่ทำโดยทอร์คคงที่จะเท่ากับผลคูณของทอร์คกับระยะกระจัดเชิงมุม

ทอร์ค Γ มีหน่วยเป็น N·m

แรงในรูป 8-18 ถ้าเป็นแรงในแนวสัมผัส จะทำให้เกิดงานได้ แต่ถ้าเป็นแรงในแนวรัศมีจะไม่มีงานและทอร์ค เพราะไม่มีระยะกระจัดและแขนของโมเมนต์ในแนวรัศมี

จากสมการ (8-32) หารสมการทั้ง 2 ข้างด้วย dt จะได้

$$\frac{dW}{dt} = \Gamma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$\frac{dW}{dt}$ คืออัตราการทำงาน หรือกำลัง (P)

$\frac{d\theta}{dt}$ คือความเร็วเชิงมุม (ω) ดังนั้น

$$P = \Gamma\omega \quad \text{..... (8-34)}$$

เป็นสูตรสำหรับการเคลื่อนที่แบบวงกลม เปรียบได้กับ P = Fv ซึ่งเป็นกรณีการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น

ตัวอย่าง 8-14 เพลาของเครื่องยนต์หมุนด้วยความเร็ว 3,600 rpm ขณะส่งกำลัง 80 hp ไปยังล้อหลัง จงคำนวณหาทอร์ค

หลักการคำนวณ

$$\omega = \frac{(3600\ \text{rev.min}^{-1})(2\pi\ \text{rad.rev}^{-1})}{60\ \text{s.min}^{-1}}$$

$$= 120\pi.\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$80\text{hp} = (80\text{hp})(746\ \text{W}\cdot\text{hp}^{-1})$$

$$= 59{,}700\ \text{W}$$

แทนลงในสมการ(8-34) $\Gamma = P/\omega$

$$= 59700\ \text{W}/120\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$= 158\ \text{N}\cdot\text{m}$$

ตัวอย่าง 8-15 มอเตอร์ไฟฟ้าขับหินเจียรโดยให้ทอร์ค 10 N.m โมเมนต์ความเฉื่อยของใบเจียร = 2 kg.m^2 ถ้าเริ่มหมุนจากหยุดนิ่ง จงหางาน พลังงานจลน์ และกำลังเฉลี่ยของมอเตอร์หลังจากหมุนไปได้ 8 วินาที

หลักการคำนวณ

จาก $\Gamma = I\alpha$

คำนวณหาความเร่งเชิงมุมได้เท่ากับ 5 s^{-2}

ความเร็วเชิงมุมหลังจาก 8 s หาจาก

$$\omega = \alpha t = (5\text{s}^{-2})(8\text{s})$$

$$= 40\ \text{s}^{-1}$$

พลังงานจลน์ของการหมุน K $= \frac{1}{2} I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}(2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{s}^{-1})^2 = 1{,}600\ \text{J}$$

ระยะกระจัดเชิงมุมเมื่อหมุนไปได้ 8 s คือ

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}(5\text{s}^{-2})(8\text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

งานของมอเตอร์คือ W $= \Gamma\theta$

$$= (10\ \text{N}\cdot\text{m})\ (160\ \text{rad})$$

$$= 1{,}600\ \text{J}$$

กำลังเฉลี่ย $P_{av} = \frac{1{,}600\text{J}}{8\text{s}}$

$$= 200\ \text{J}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$= 200\ \text{W}$$

ข้อสังเกต ใช้สมการ $P = \Gamma\omega$ ไม่ได้เนื่องเพราะ ω ไม่คงที่

อย่างไรก็ตาม สามารถคำนวณหางานทั้งหมดได้ โดยวิธีการอินทิเกรต กำลัง P จาก 0 ถึง 8 s ดังนี้

$$W = \int P\,dt$$

$$= \int \Gamma\omega\,dt$$

$$= \int \Gamma(\alpha t)dt$$

$$= \int_0^{8s} (10\ N\cdot m)(5\ s^{-2})t\,dt$$

$$= 1{,}600\ J$$

กำลังชั่วขณะ ณ เวลา 8s คือ $\Gamma\omega$ = (10 N·m)(40 s^{-1}) = 400 W

เนื่องเพราะความเร็วเชิงมุมเพิ่มขึ้นเป็นเชิงเส้น ดังนั้น กำลังเฉลี่ยเป็นครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด

$= \frac{400}{2} = 200$ W

วีดีโอเพื่อการศึกษา

ไจโรสโคป มีคุณสมบัติชี้ไปในทิศทางเดียวตลอดเวลา โดยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่งของฐานว่าจะเอียงไปอย่างไร ในวีดีโอมีการทดลองให้เห็นอย่างชัดเจน บนกระสวยอวกาศจึงใช้ไจโรสโคปนำวิถี เพื่อนำยานกลับสู่โลก คลิกครับ

8-11 แกนหมุนคงที่

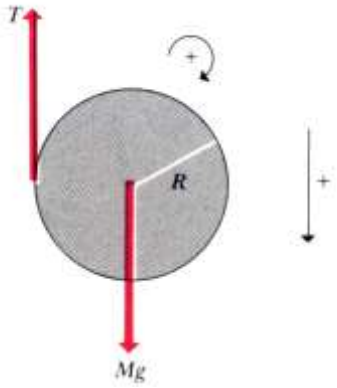
ถ้าแกนหมุนไม่ได้หยุดนิ่งอยู่กับที่ เพราะมีการเลื่อนตำแหน่งและหมุนไปพร้อม ๆ กัน ตัวอย่างเช่น ลูกบอลไหลลงมาตามพื้นเอียงโดยไม่ไถล เป็นต้น

การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ พลังงานจลน์ทั้งหมดของวัตถุจะเท่ากับพลังงานจลน์เลื่อนตำแหน่งบวกกับพลังงานจลน์ของการหมุน กำหนดให้มวล M กลิ้งไปด้วยความเร็ว v และหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω พลังงานจลน์ทั้งหมด

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_c\omega^2$$

I_c คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของทรงกระบอกรอบแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ตัวอย่าง 8-16 พันเชือกรอบทรงกระบอกหลายรอบ ยึดปลายเชือกไว้ ปล่อยให้ทรงกระบอกตกลงมา จงหาความเร่งและความตึงในเส้นเชือกของทรงกระบอก



รูป 8-19 ปล่อยให้ทรงกระบอกตกลงมา โดยจับปลายเชือกไว้ด้านหนึ่ง

หลักการคำนวณ

จากกฎข้อที่ 2 (เคลื่อนย้ายตำแหน่ง) $\Sigma F = ma$

$$Mg - T = Ma \quad \text{..... (8-35)}$$

สมการการหมุน $\Sigma\Gamma = I\alpha$

$$TR = I\alpha = \frac{1}{2}(MR^2)\alpha \quad \text{..... (8-36)}$$

ถ้าเชือกไม่ลื่นไถลขณะคลายตัวออก ความเร่งเชิงเส้น

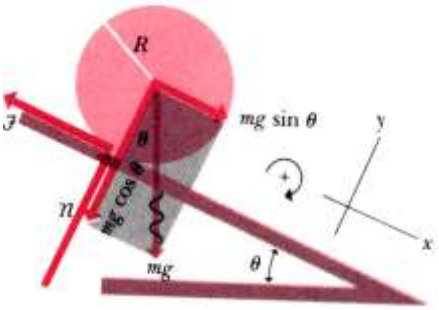
$$a = R\alpha \quad \text{..... (8-37)}$$

แทน $\alpha = \frac{a}{R}$ ลงไปในสมการ (8-36) แก้สมการหา a และ T ได้ดังนี้

$$a = \frac{2}{3}g$$

$$T = \frac{1}{3}Mg$$

ตัวอย่าง 8-17 โบว์ลิ่งลูกหนึ่งกำลังกลิ้งลงมาโดยไม่มีการลื่นไถลบนพื้นเอียงทำมุม θ กับระดับ จงหาความเร่งของลูกโบว์ลิ่งตามแนวพื้นเอียง



รูป 8-20 แผนภาพแทนแรงของลูกโบว์ลิ่งขณะที่กำลังกลิ้งลงมาบนพื้นเอียง

หลักการคำนวณ

จากกฎข้อที่ 2 $mg\sin\theta - f = ma$

จากสมการการหมุน

$$fR = I\alpha = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\alpha$$

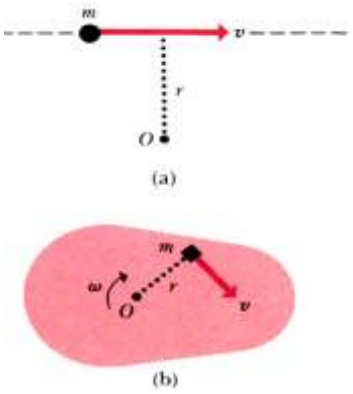
ถ้าลูกโบว์ลิ่งไม่ลื่นไถล จาก $a = R\alpha$ แทน $\alpha = a/R$ ลงในสมการบน แก้สมการหา a และ f ได้ดังนี้

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$

วิเคราะห์โจทย์ ความเร่งที่คำนวณได้เทียบได้กับ $\frac{5}{7}$ เท่าของมวลที่ไถลลงบนพื้นเอียง ทำมุม θ กับระดับ โดยที่ไม่มีแรงเสียดทาน ถึงกระนั้นที่บอลกลิ้งได้โดยไม่ลื่นไถลก็เพราะพื้นมีแรงเสียดทาน และสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (μ_s) จะต้องมีค่าเท่ากับ $\frac{f}{N} = \frac{\frac{2}{7}mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \frac{2}{7}\tan\theta$ เป็นอย่างน้อย ดังนั้นถ้าพื้นเอียงมาก μ_s ก็จะต้องมากตามเพื่อป้องกันการลื่นไถล

8-12 โมเมนตัมและการดลเชิงมุม



รูป 8-21 โมเมนตัมเชิงมุม

พิจารณามวล m เคลื่อนที่บนระนาบด้วยความเร็ว v รอบแกนหมุน O มีโมเมนตัมเชิงเส้น = mv เราจะนิยามโมเมนตัมเชิงมุม L ของอนุภาค รอบแกนหมุน O มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบ เป็นผลจากการคูณของโมเมนตัมเชิงเส้นกับระยะจากแกนหมุนตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค

โมเมนตัมเชิงมุม = L = mvr ..... (8-38)

ในทำนองเดียวกับทอร์ค อาจเรียกโมเมนตัมเชิงมุมว่า เป็น**โมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้น**

ให้อนุภาคมวล m ภายในก้อนวัตถุกำลังหมุนรอบจุด O ดังรูป 8-21b ด้วยความเร็วเชิงเส้น v ซึ่งความเร็วเชิงเส้นมีความสัมพันธ์กับความเร็วเชิงมุม ω ดังนี้ $v = \omega r$ แทนค่าลงไปในสมการ (8-38) จะได้

$$L = m\omega r^2$$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคเดียว

จะหาโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคทั้งหมดได้จากผลรวมของอนุภาคทั้งหมดในวัตถุ แต่อนุภาคภายในวัตถุก้อนเดียวกัน จะมี ω เท่ากัน จึงแยก ω ออกเป็นตัวร่วมได้

$$\Sigma\omega mr^2 = \omega\Sigma mr^2$$

Σmr^2 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุน (I) จะได้

$$L = I\omega$$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุ ..... (8-39)

เมื่อเทียบกับโมเมนตัมเชิงเส้น $P = mv$ มีส่วนคล้ายกัน

I มีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น L จะมีทิศทางเดียวกับ ω

ทอร์คคงที่กระทำบนวัตถุที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย I ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 ทำให้ความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนจาก ω_1 ไปเป็น ω_2 จะได้

$$\Gamma = I\alpha = I\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{(t_2 - t_1)}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\Gamma(t_2 - t_1) = I\omega_2 - I\omega_1 = L_2 - L_1 = \Delta L$$ ..... (8-40)

ทอร์คคูณกับเวลาเรียกว่า **การดลเชิงมุม** แทนด้วยสัญลักษณ์ J_θ

การดลเชิงมุม = $J_\theta = \Gamma(t_2 - t_1)$ ..... (8-41)

การดลเชิงมุม คือการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุม

ในกรณีที่ทอร์คไม่คงที่

$$J_\theta = \int_{t_1}^{t_2} \Gamma dt$$ ..... (8-42)

จากสมการ (8-40) สรุปความสัมพันธ์ได้ดังนี้

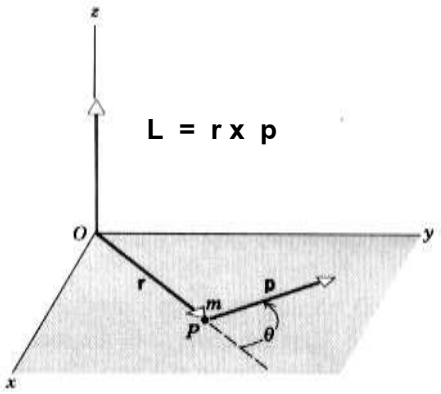
$$J_\theta = I\omega_2 - I\omega_1 = L_2 - L_1$$ ..... (8-43)

จากสมการ (8-39) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

เทียบกับสมการ (8-27)

$$\Sigma\Gamma = \frac{dL}{dt} \quad \text{..... (8-44)}$$



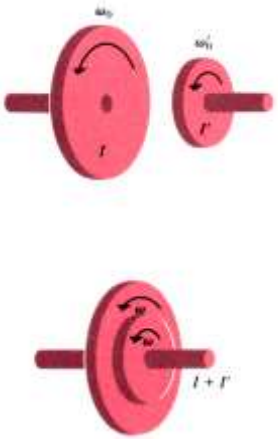
รูป 8-22 อธิบายโมเมนตัมเชิงมุมในรูปของเวกเตอร์

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad \text{..... (8-45)}$$

r เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาคเทียบกับจุด O

L เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบของรูป มีขนาดเท่ากับ mvr

8-13 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม



รูป 8-23 การดลเชิงมุมของจานหมุนแต่ละใบ คือการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัม

จานหมุน 2 ใบดังรูป 8-23 มีโมเมนต์ความเฉื่อย I และ I'และมีความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น ω_0 และ ω'_0 ตามลำดับ ประกบจานทั้งสองเข้าหากันด้วยแรงในแนวระดับ แรงนี้จะไม่ทำให้เกิดทอร์ค เพราะว่าอยู่แกนเดียวกันกับแกนหมุน รอสักครู่จานทั้งสองจะมีความเร็วเชิงมุมเท่ากับ ω

ขณะที่จานประกบกัน จานใบใหญ่ให้ทอร์ค Γ กับจานใบเล็ก ส่วนจานใบเล็กก็จะให้ Γ กับจานใบใหญ่ หลังจากที่จานมีความเร็วเชิงมุมร่วมกัน ทอร์ครวมเป็นศูนย์ ซึ่งก็เป็นไปตามกฎข้อที่สามของนิวตัน เหตุผลก็เพราะว่า เป็นแรงกิริยาและคู่กิริยา กระทำที่จุดเดียวกัน มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้ามกัน ดังนั้น ทอร์คของจานใบใหญ่จะเท่ากับทอร์คของจานใบเล็ก แต่ทิศทางแตกต่างกัน $\Gamma = -\Gamma'$ หรือเขียนอยู่ในรูปของการดลเชิงมุม $J_\theta = - J_\theta'$

จากสมการ (8-43)

$$J_\theta = I\omega - I\omega_0$$

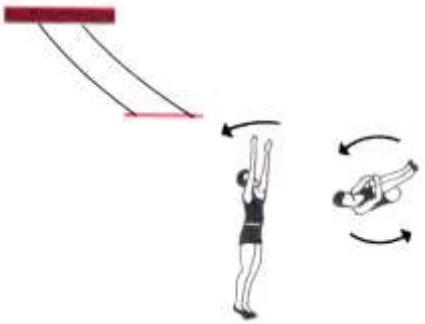
$$J_\theta' = I'\omega - I'\omega_0'$$

เพราะ $J_\theta = - J_\theta'$ ดังนั้น

$$I\omega - I\omega_0 = -(I'\omega - I'\omega_0')$$

จัดรูปใหม่ $I\omega_0 + I'\omega_0' = (I+I')\,\omega$ ..... (8-46)

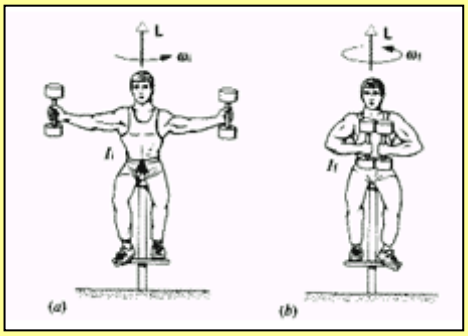
ข้างซ้ายของสมการ (8-46) เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวมก่อนประกบจาน ส่วนสมการด้านขวาเป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวมหลังประกบจาน ไม่มีทอร์คภายนอกมากระทำกับระบบ สามารถ**สรุปได้ว่า** ถ้าไม่มีทอร์คภายนอกกระทำกับระบบหรือทอร์คสุทธิของระบบเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะคงที่ เราเรียกว่า **กฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม**



รูป 8-24 พิสูจน์กฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

รูป 8-24 นักกายกรรมปล่อยมือจากเชือก ตีลังกากลางอากาศ ขาและแขนของเขาเหยียดตรง ถ้าขณะนั้นเขาหดตัวลงโดยย่อเข่าและมือ ทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดหมุนของตัวเขาลดลง เมื่อระบบไม่มีทอร์คกระทำจากภายนอก โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะคงที่ และความเร็วเชิงมุมจะเพิ่มขึ้น นั่นคือนักกายกรรมจะหมุนตัวกลางอากาศได้เร็วขึ้น

วีดีโอเพื่อการศึกษา



การทดลองกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมบนเก้าอี้หมุน คลิกครับ

ตัวอย่าง 8-18 จากรูป 8-23 กำหนดให้จานใบแรกมีมวล 2 kg มีรัศมี 0.2 m ความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น 50 $rad \cdot s^{-1}$ จานใบที่สองมีมวล 4 kg มีรัศมี 0.1 m ความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น 200 $rad \cdot s^{-1}$ จงหาความเร็วเชิงมุมสุดท้ายหลังจากจานประกบกัน อยากจะทราบว่าพลังงานจลน์ของระบบอนุรักษ์หรือไม่

หลักการคำนวณ

โมเมนต์ความเฉื่อยของจานใบแรก $I = \frac{1}{2}(2\ kg)(0.2\ m)^2 = 0.04\ kg \cdot m^2$

โมเมนต์ความเฉื่อยของจานใบที่สอง $I' = \frac{1}{2}(4\ kg)(0.1\ m)^2 = 0.02\ kg \cdot m^2$

จากกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม จะได้

$$(0.04\ kg \cdot m^2)(50\ rad \cdot s^{-1}) + (0.02\ kg \cdot m^2)(200\ rad \cdot s^{-1}) = (0.04\ kg \cdot m^2 + 0.02\ kg \cdot m^2)\,\omega$$

$$\omega = 100\ rad \cdot s^{-1}$$

พลังงานจลน์เริ่มต้นก่อนประกบ

$$K_0 = \frac{1}{2}(0.04\ kg \cdot m^2)(50\ rad \cdot s^{-1})^2 + \frac{1}{2}(0.02\ kg \cdot m^2)(200\ rad \cdot s^{-1})^2$$

$$= 450\ J$$

พลังงานจลน์สุดท้ายหลังประกบ

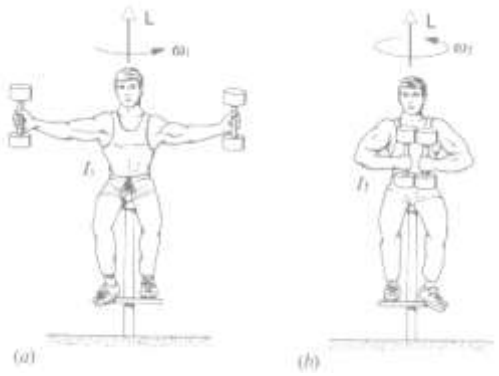
$$K = \frac{1}{2}(0.04\ kg \cdot m^2 + 0.02\ kg \cdot m^2)(100\ rad \cdot s^{-1})^2$$

$$= 300\ J$$

ข้อสังเกต พลังงานจลน์สูญเสียไป 150 J ระหว่างการประกบ สรุปได้ว่าพลังงานจลน์อาจจะไม่คงที่ ถึงแม้ว่าไม่มีแรงและทอร์คจากภายนอกมากระทำกับระบบ

ตัวอย่าง 8-19 นักกล้ามหุ่นงามคนหนึ่งนั่งอยู่บนจุดศูนย์กลางของเก้าอี้หมุน กางแขนออกไปในแนวระดับมือแต่ละข้างถือมวล 5 kg เก้าอี้หมุน 1 รอบในเวลา 2 วินาที จงหาความเร็วเชิงมุมเมื่อเขาหุบแขนเข้าหาตัว กำหนดให้นักกล้ามผู้นี้มีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากับ 6 $kg.m^2$ ระยะวัดจากน้ำหนักถึงแกนหมุนขณะเหยียดแขนคือ 1 m และหุบแขนคือ 0.2 m

หลักการคำนวณ



รูป 8-25

ถ้าเก้าอี้หมุนไม่มีแรงเสียดทาน ทอร์คจากภายนอกระบบไม่มีจะเป็นศูนย์โมเมนตัมเชิงมุมคงตัว หรืออนุรักษ์ นั่นคือ

โมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น = โมเมนตัมเชิงมุมสุดท้าย

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

I_i และ ω_i คือโมเมนต์ความเฉื่อย และความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น

I_f และ ω_f คือโมเมนต์ความเฉื่อยและความเร็วเชิงมุมสุดท้าย

โมเมนต์ความเฉื่อยรวม

$$I = I_{คน} + I_{น้ำหนัก}$$

$$I_i = 6\ kg\cdot m^2 + 2(5\ kg)(1.0\ m)^2 = 16\ kg\cdot m^2$$

$$I_f = 6\ kg\cdot m^2 + 2(5\ kg)(0.2\ m)^2 = 6.4\ kg\cdot m^2$$

$$\omega_i = 2\pi\left(\frac{1}{2}\ rad\cdot s^{-1}\right)$$

$$\omega_f = \omega_i \frac{I_i}{I_f}$$

$$= \pi\ rad\cdot s^{-1}\ \frac{16\ kg\cdot m^2}{6.4\ kg\cdot m^2}$$

$$= 2.5\pi\ rad\cdot s^{-1}$$

$$= 7.85\ rad\cdot s^{-1}$$

ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายมากกว่าเริ่มต้น

พลังงานจลน์เริ่มต้น K_0

$$= \frac{1}{2}(16\ kg\cdot m^2)(\pi\ rad\cdot s^{-1})^2$$

$$= 79\ J$$

พลังงานจลน์สุดท้าย K

$$= \frac{1}{2}(6.4\ kg.m^2)(2.5\pi\ rad\cdot s^{-1})^2$$

$$= 197\ J$$

คำถาม พลังงานจลน์สุดท้ายมากกว่าเริ่มต้นถูกต้องหรือไม่

ตัวอย่าง 8-20 ประตูกว้าง 1 m มวล 1.5 kg หมุนไปมารอบบานพับโดยไม่มีแรงเสียดทาน ยิงลูกปืนมวล 10 กรัม ด้วยความเร็ว 400 $m \cdot s^{-1}$ ตั้งฉากกับบานประตู ฝังเข้าไปบริเวณจุดกึ่งกลางของประตู จงหาความเร็วของประตูหลังจากถูกยิง อยากทราบว่าพลังงานจลน์ของระบบอนุรักษ์หรือไม่

หลักการคำนวณ

โมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น

$$L = mvr$$
$$= (0.01\ kg)(400\ m \cdot s^{-1})(0.5\ m)$$
$$= 2.0\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

โมเมนตัมเชิงมุมสุดท้าย $I_{รวม}\omega$ โดยที่ $I_{รวม} = I_{ประตู} + I_{ลูกปืน}$

$$I_{ประตู} = \frac{ML^2}{3}$$
$$= \frac{(15\ kg)(1.0\ m)^2}{3}$$
$$= 5.0\ kg \cdot m^2$$

$$I_{ลูกปืน} = mr^2$$
$$= (0.01\ kg)(0.5\ m)^2$$
$$= 0.0025\ kg \cdot m^2$$

ไม่มีทอร์คกระทำจากภายนอก ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่

$$mvr = I_{รวม}\omega$$
$$2.0\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = (5.0\ kg \cdot m^2 + 0.0025\ kg \cdot m^2)\ \omega$$
$$\omega = 0.4\ rad \cdot s^{-1}$$

ลูกปืนฝังลงไปในบานประตู ลักษณะแบบนี้พลังงานจะไม่อนุรักษ์

พลังงานจลน์เริ่มต้น K_i

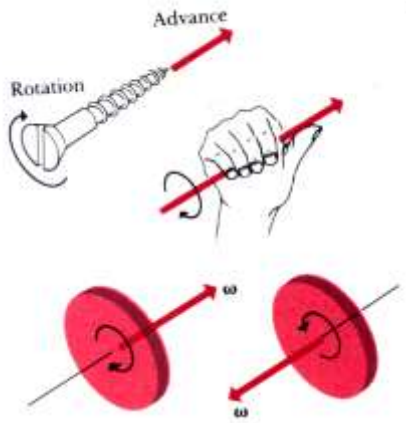
$$= \frac{1}{2}mv^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.01\ kg)(400\ m \cdot s^{-1})^2$$
$$= 800\ J$$

พลังงานจลน์สุดท้าย K_f

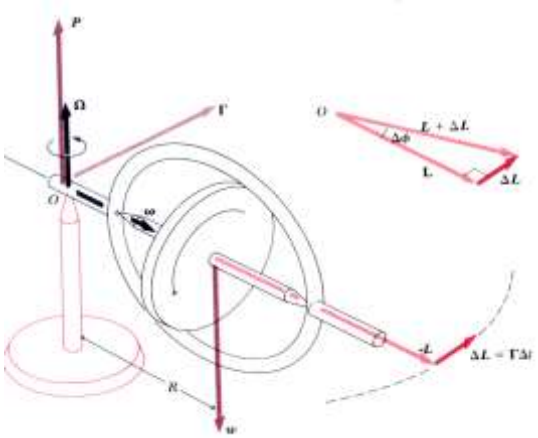
$$= \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}(5.0025\ kg \cdot m^2)(0.4\ rad \cdot s^{-1})^2$$
$$= 0.4\ J$$

8-14 เวกเตอร์เชิงมุม

ทิศทางการหมุน



รูป 8-26 เวกเตอร์ทิศทางของความเร็วเชิงมุม



รูป 8-27 เวกเตอร์ $\Delta \mathbf{L}$ คือการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมในช่วงเวลา Δt เนื่องจากมีทอร์คซึ่งเกิดจากน้ำหนักมากระทำกับระบบ ; เวกเตอร์ $\Delta \mathbf{L}$ มีทิศเดียวกับ Γ

ความเร็วเชิงมุม โมเมนตัมเชิงมุม และทอร์ค ปริมาณเหล่านี้สามารถแสดงด้วยสัญลักษณ์เวกเตอร์ ส่วนทิศทางหาได้จากกฎของมือขวา ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการทราบทิศทางของความเร็วเชิงมุมก็ให้ใช้มือขวาหรือสกรู กำรอบแกนหมุน หมุนมือตามทิศทางการหมุน นิ้วโป้งและสกรูจะชี้ไปในทิศทางของ ω

ไจโรสโคป ดังรูป 8-27 สามารถหมุนรอบแกนหมุน O ได้อย่างอิสระ แรงที่กระทำบนไจโรสโคป มีอยู่เพียงแรงเดียว คือ น้ำหนักของลูกข่าง w มีทิศลงที่จุดศูนย์กลางมวลของไจโรสโคป ทอร์ค Γ จากน้ำหนัก w มีทิศทางตามรูป ขณะที่ลูกข่างหมุน(วิธีจะทำให้ลูกข่างหมุน ให้พันเชือกบนแกนของลูกข่างหลาย ๆ รอบ ดึงลง ลูกข่างก็จะหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω) ไจโรสโคบจะมีโมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น $L = I\omega$ ทอร์คสุทธิจะทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยนแปลงไป (ΔL) และทำให้ไจโรหมุนไปเป็นมุม $\Delta\phi$ ดังสมการ $\Delta\phi = \frac{|\Delta L|}{L}$ การเคลื่อนที่ของลูกข่างรอบแกน O เรียกว่า **การควง (precession)**

$\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ เรียกว่า ความเร็วเชิงมุมของการควง ใช้สัญลักษณ์ Ω (โอเมก้า) แทน

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{|\Delta L|/|L|}{\Delta t} = \frac{\Gamma}{L} = \frac{wR}{I\omega} \quad \text{..... (8-47)}$$

ความเร็วเชิงมุมของการควง Ω เป็นสัดส่วนกลับกับความเร็วเชิงมุมของลูกข่าง ถ้าลูกข่างหมุนเร็ว การควงจะช้า แต่ถ้าลูกข่างหมุนช้าการควงจะเร็ว อย่างไรก็ตามถ้าลูกข่างไม่หมุน ก็ไม่มีโมเมนตัมเชิงมุม L ตั้งแต่เริ่มต้นแล้ว ไจโรสโคปก็จะไม่มีการควง

ตัวอย่าง 8-21 จากรูป 8-27 ลูกข่างหมุนรอบตัวเองในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ด้วยอัตราเร็ว 30 รอบต่อวินาที มวลของลูกข่าง 0.5 kg มีโมเมนต์ความเฉื่อย = 5×10^{-4} kg·m^2 จุดศูนย์กลางมวลของลูกข่างห่างจากจุดหมุน 4 cm จงคำนวณหาความเร็วเชิงมุมของการควง

หลักการคำนวณ จากสมการ (8-47)

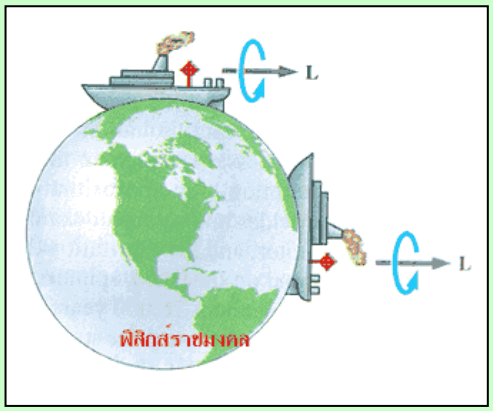
$$\Omega = \frac{wR}{I\omega} = \frac{mgR}{I\omega}$$

$$\Omega = \frac{(0.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})(4\text{x}10^{-2}\ \text{m})}{(5\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(30\ \text{rev}\cdot\text{s}^{-1}\times 2\ \text{rad}\cdot\text{rev}^{-1})}$$

$$= 2.1\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

ตามกฎมือขวา Ω จะมีทิศทวนเข็มนาฬิกา เมื่อมองจากด้านบน

บรรยายลงในกระดานฟิสิกส์ราชมงคล



เมื่อไม่มีแรงบิดหรือทอร์คกระทำจากภายนอก โมเมนตัมเชิงมุมทั้งขนาดและทิศทางจะคงที่ ดังเช่น เข็มทิศไจโรสโคปที่หมุนอยู่ในเรือ ถ้าไม่มีทอร์คภายนอกไปกระทำมันจะไม่เปลี่ยนทิศทาง แม้ว่าเรือลำนั้นจะเคลื่อนที่รอบโลกไปที่ใดก็ตามดังรูป เข็มทิศไจโรจึงนำไปใช้ในระบบนำร่อง ปัจจุบันมีระบบคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ ดังนั้นเมื่อเรือเปลี่ยนตำแหน่งไป คอมพิวเตอร์จะคำนวณเทียบกับตำแหน่งของเข็มทิศไจโร พร้อมไปกับข้อมูลจากตัววัดความเร่ง คอมพิวเตอร์จะคำนวณหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นได้ แม่นยำไม่มีผิดพลาด ให้นักศึกษาวิจารณ์ภาพนี้ลงใน กระดานฟิสิกส์ราชมงคล

ทดสอบก่อนและหลังเรียน

วิธีทำ ให้ ใส่ชื่อ สกุล เลือกวิชาที่สอบ และจำนวนข้อ แต่ต้องไม่เกินจากที่กำหนดไว้ เช่น กำหนดไว้ 10 ข้อ เวลาเลือกจำนวนข้อ ให้เลือก 5 และ 10 ข้อไม่เกินจากนี้ เป็นต้น เมื่อทำเสร็จสามารถดูคะแนนจากรายละเอียดผู้ทำข้อสอบได้ทันที

เรื่อง การหมุน

คลิกเข้าสู่ ทดสอบก่อนและหลังเรียน

แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย

แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย คลิกครับ

แบบฝึกหัดเรื่องการหมุน

1. ก) จงหามุมในหน่วยเรเดียนที่ส่วนโค้งยาว 1.50 m บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 2.50 m รองรับที่จุดศูนย์กลาง มุมนี้มีค่าเท่าใดในหน่วยองศา [ตอบ 0.600 rad = 34.4 องศา]

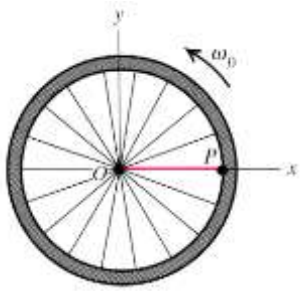
   ข) ส่วนโค้งยาว 14.0 cm บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งรองรับมุม 128 องศา ที่จุดศูนย์กลาง วงกลมนี้มีรัศมีเท่าใด [ตอบ 6.27 cm]

   ค) มุมระหว่างเส้นรัศมีสองเส้นของวงกลมรัศมี 1.50 m มีค่าเท่ากับ 0.700 rad จงหาความยาวของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมระหว่างตำแหน่งที่เส้นรัศมีสองเส้นนี้ตัดกับเส้นรอบวง [ตอบ 1.05 m]

2. มุม θ ที่ล้อรถจักรยานล้อหนึ่งหมุนไปมีค่า $\theta(t) = a + bt^2 - ct^3$ โดยที่ a , b และ c เป็นค่าคงตัวบวกที่ทำให้ θ มีหน่วยเป็นเรเดียนเมื่อเวลา t มีหน่วยเป็นวินาที

   ก) จงคำนวณความเร่งเชิงมุมล้อในรูปของฟังก์ชันของเวลา [ตอบ $\alpha(t) = 2b - 6ct$]

   ข) ที่เวลาใดความเร็วเชิงมุมของล้อมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงชั่วขณะ [ตอบ $b/3c$]

3. 

   ล้อจักรยานล้อหนึ่งกำลังถูกทดสอบที่ร้านซ่อม ความเร็วเชิงมุมของล้อมีค่า 4.00 rad/s ที่เวลา t = 0 และ ความเร่งเชิงมุมของล้อมีค่าคงตัว -1.20 rad/s^2 ซี่ล้อ OP ซี่หนึ่งของล้อทับซ้อนกับแกน +x ที่ t = 0 ดังรูป

   ก) ความเร็วเชิงมุมของล้อที่ t = 3.00 s มีค่าเท่าใด [ตอบ 0.40 rad/s]

   ข) ซี่ล้อ OP ทำมุมเท่าใดกับแกน +x ที่เวลานี้ [ตอบ 6.60 rad]

4. ใบมีดปั่นอาหารเครื่องหนึ่งหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัว 1.50 rad/s^2
   ก) ถ้าใบมีดเริ่มหมุนจากหยุดนิ่ง นานเท่าใดใบมีดจึงจะมีความเร็วเชิงมุม 36.0 rad/s [ตอบ 24.0 s]
   ข) ใบมีดหมุนไปได้กี่รอบในช่วงเวลานี้ [ตอบ 68.8 รอบ]

5. ที่ t = 0 ล้อฝนมีดล้อหนึ่งมีความเร็วเชิงมุม 24.0 rad/s ล้อฝนมีดมีความเร่งเชิงมุมคงตัว 30.0 rad/s^2 จนกระทั่งอุปกรณ์ตัดไฟทำงานที่ t = 2.00 s จากนั้นล้อหมุนที่อัตราเร่งเชิงมุมคงตัวไปเป็นมุม 432 rad เมื่อหยุด
   ก) ล้อหมุนไปเป็นมุมทั้งหมดเท่าใดในระหว่าง t = 0 จนกระทั่งหยุด [ตอบ 540 rad]
   ข) ล้อหยุดหมุนที่เวลาเท่าใด [ตอบ 12.3 s]
   ค) ความเร่งในขณะที่ล้อหมุนช้าลงมีค่าเท่าใด [ตอบ -8.17 rad/s^2]

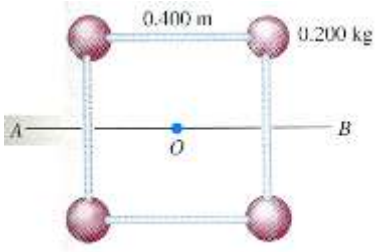
6. ล้อๆ หนึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัวที่ 6.00 rad/s
   ก) จงหาความเร่งในแนวรัศมีของจุดๆ หนึ่งซึ่งอยู่ห่าง 0.500 m จากแกนโดยใช้ความสัมพันธ์ $a_{rad} = \omega^2 r$ [ตอบ a_{rad} = 18.0 m/s^2]
   ข) จงหาอัตราเร็วในแนวเส้นสัมผัสของจุดนี้และคำนวณหาความเร่งในแนวรัศมีจากความสัมพันธ์ $a_{rad} = v^2 / r$ [ตอบ v = 3.00 m/s, a_{rad} = 18.0 m/s^2]

7. ลูกกลมมวล 1 kg กลิ้งไปบนพื้นราบด้วยความเร็ว 20 m/s แล้วเคลื่อนที่ขึ้นไปบนพื้นเอียงซึ่งทำมุม 30 องศา กับแนวระดับ
   ก) พลังงานจลน์ทั้งหมดของลูกกลมเป็นเท่าใดขณะอยู่บนพื้นราบ [ตอบ 280 J]
   ข) ลูกกลมจะขึ้นไปบนพื้นเอียงได้ไกลเท่าใด [ตอบ 57.2 m]

8. ไม้เมตรอันหนึ่งมีมวล m ยาว ℓ ตั้งตรงบนพื้นด้วยปลายข้างหนึ่ง ถ้าปล่อยให้ไม้เมตรนี้ล้มลงมาโดยให้ถือว่าปลายไม้ที่แตะพื้นคงอยู่ที่ตำแหน่งเดิม ไม้จะฟาดพื้นด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าใด [ตอบ $\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$]

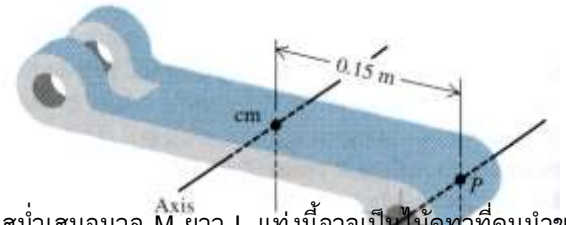
9. ไม้ค้ำทาท่อนหนึ่งทำจากทรงกระบอกโลหะเรียวมวล M และยาว L ที่ปลายแต่ละข้างมีปลอกยางมวล m สวมอยู่ และแต่ละปลอกสามารถมองได้ว่าเป็นอนุภาคในปัญหาข้อนี้ จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยทั้งหมดของไม้ค้ำทารอบแกนหมุนโดยปกติ (ตั้งฉากกับไม้ค้ำทาผ่านจุดกึ่งกลางของไม้)
   [ตอบ $(M/12 + m/2)L^2$]

10. ทรงกลมเหล็ก 4 ลูก แต่ละลูกมองว่าเป็นจุดมวล 0.200 kg ได้ วางทรงกลมทั้งสี่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 0.400 m และต่อกันด้วยแท่งเบา ดังรูป จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบรอบแกน

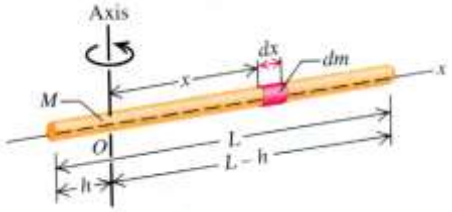


   ก) ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมจัตุรัสและตั้งฉากกับระนาบสี่เหลี่ยม (แกนที่ผ่านจุด O ในรูป)
   ข) ที่แบ่งครึ่งด้านตรงข้ามสองด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัส (แกนตามเส้น AB ในรูป)
   ค) ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมที่ด้านบนซ้ายและด้านล่างขวาและผ่านจุด O

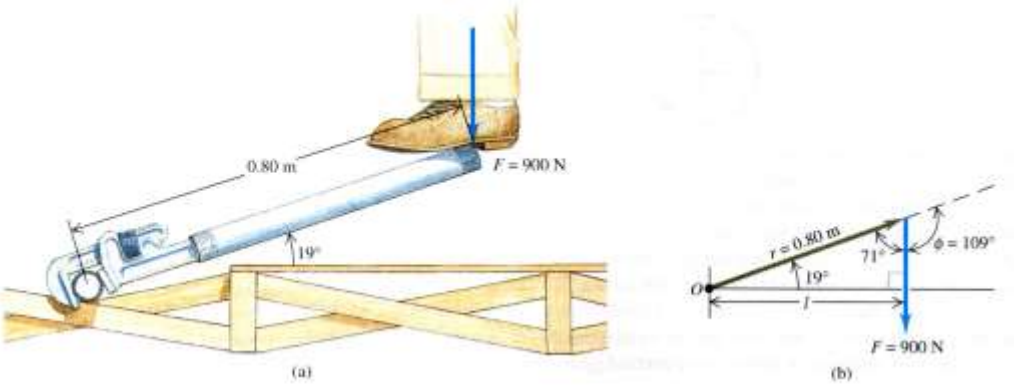
11. ส่วนหนึ่งของข้อต่อชิ้นหนึ่ง ดังรูป มีมวล 3.6 kg เราวัดโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่อยู่ห่าง 0.15 m จากจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุได้ I_P = 0.132 kg.m^2 โมเมนต์ความเฉื่อย I_{cm} ของวัตถุรอบแกนขนานที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมีค่าเท่าใด [ตอบ 0.051 kg.m^2]



12. จากรูป แท่งไม้บางสม่ำเสมอมวล M ยาว L แท่งนี้อาจเป็นไม้ค้ำที่คนนำขบวนแห่ถือ (ไม่มีปลอกยางที่ปลายสองข้าง) จงคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งนี้รอบแกนผ่าน O ที่ระยะห่าง h ใดๆ จากปลายด้านหนึ่ง [ตอบ $\frac{1}{3}$M(L^2 – 3Lh + 3h^2)]



13. ช่างประปาคนหนึ่งไม่สามารถหมุนเกลียวข้อต่อออกได้ ก็เลยเอาเศษท่อเก่า ("ตัวโกง") สวมไปบนมือจับประแจของเขา แล้วเขาก็ใช้น้ำหนักตัวทั้งหมดของเขา 900 N ทำต่อปลายของตัวโกงโดยการยืนบนตัวโกง ระยะจากจุดศูนย์กลางของข้อต่อไปยังจุดที่น้ำหนักกระทำคือ 0.80 m และมือจับประแจและตัวโกงทำมุม 19 องศา กับแนวระดับ ดังรูป จงหาขนาดและทิศของทอร์คที่เขากระทำต่อข้อต่อท่อ [ตอบ 680 N.m มีทิศพุ่งเข้าไปในระนาบของรูป]



14. เปลือกทรงกระบอกมวล M และรัศมี R กลิ้งโดยไม่ไถลด้วยอัตราเร็ว v_{cm} บนผิวเรียบแบน พลังงานจลน์ของวัตถุมีค่าเท่าใด [ตอบ Mv_{cm}^2]
15. โฆษณาชิ้นหนึ่งอ้างว่ากำลังจ่ายออกของเครื่องรถยนต์คันหนึ่งมีค่าเท่ากับ 200 hp ที่ 6000 rpm ทอร์คขณะนั้นมีค่าเท่าใด

16. พัดลมกังหันในเครื่องยนต์ไอพ่นเครื่องหนึ่ง ดังรูป มีโมเมนต์ความเฉื่อยขนาด 2.5 $kg.m^2$ รอบแกนหมุนของเครื่อง ในขณะที่กังหันเริ่มหมุน ความเร็วเชิงมุมของกังหันในรูปฟังก์ชันของเวลาคือ

$$\omega = (400\ rad/s^3)t^2$$

ก) จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของใบพัดในรูปของฟังก์ชันของเวลา และให้หาค่าของโมเมนตัมเชิงมุมนี้ที่เวลา t = 3.0 s [ตอบ 9000 $kg.m^2/s$]

ข) จงหาทอร์คสุทธิที่กระทำต่อใบพัดในรูปฟังก์ชันของเวลา และจงหาทอร์คที่เวลา t = 3.0 s [ตอบ 6000 N.m]

17. ประตูกว้าง 1.0 m มวล 15 kg ติดบานพับที่ด้านหนึ่งทำให้สามารถหมุนโดยไม่มีความเสียดทานรอบแกนดิ่ง ประตูนี้ไม่ได้ใส่กลอนไว้ ตำรวจนายหนึ่งยิงลูกปืนมวล 10 g และอัตราเร็ว 400 m/s เข้าไปที่ตรงกลางประตูพอดีในทิศตั้งฉากกับระนาบของประตู จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของประตูหลังจากที่ลูกปืนฝังเข้าไปในประตูพอดี พลังงานจลน์มีค่าคงตัวหรือไม่ [ตอบ 0.40 rad/s พลังงานจลน์สุดท้ายมีค่าเพียง 1/2000 ของค่าเดิม]

18. ชายคนหนึ่งยืนอยู่กลางแป้นหมุน มือทั้งสองถือก้อนน้ำหนักมือละ 2 kg และเหยียดแขนตรงให้ก้อนน้ำหนักห่างแกนหมุน 1 m และหมุนแป้นนั้นด้วยอัตรา 6 รอบ/นาที โมเมนต์ความเฉื่อยเมื่อเขายื่นมือเปล่ารอบแกนหมุนเท่ากับ 10 kg/m^2 ถ้าเขาหดแขนเข้ามาก้อนน้ำหนักทั้งสองห่างแกนหมุน 0.2 m เขาจะหมุนในอัตรากี่รอบ/นาที [ตอบ 8.3 รอบ/นาที]

19. จงคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุมของเข็มวินาทีบนนาฬิการอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของหน้าปัดนาฬิกา เข็มนาฬิกายาว 15.0 cm และมีมวล 6.00 g ให้พิจารณาว่าเข็มนาฬิกาเป็นแท่งวัตถุผอมบางซึ่งกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัวรอบปลายข้างหนึ่ง [ตอบ 4.71 x 10^{-6} $kg.m^2/s$]

20. เมื่อใช้ทอร์คลัพธ์ขนาด 20 N.m กระทำที่ล้ออันหนึ่งทำให้ล้อนั้นหมุน จากหยุดนิ่งเป็น 100 รอบ/นาที ในเวลา 10 วินาที

ก) ให้หาโมเมนต์ความเฉื่อยของล้อนั้น [ตอบ 19.2 $kg.m^2$]

ข) เมื่อใช้ทอร์คครบ 10 วินาที นับจากถอนทอร์คนั้นออก ล้อนั้นก็หมุนช้าลง จนหยุดนิ่งในเวลา 100 วินาที นับจากถอนทอร์ค ทอร์คเนื่องจากความฝืดในการหมุนมีค่าเท่าใด [ตอบ 2 N.m]

ค) หาจำนวนทั้งหมดที่ล้อนั้นหมุนได้จากเริ่มต้นจนหยุดนิ่งสนิท [92 รอบ]