เฉลยแบบทดสอบเรื่องเวกเตอร์

ตอนที่ 1

1. กำหนดให้ $\overline{AB} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j}$ จงหามุมระหว่าง $\overline{AB}$ กับ $\overline{AC}$

วิธีทำ จะสังเกตเห็นว่าโจทย์กำหนดเวกเตอร์มาให้ 2 เวกเตอร์ และให้หามุม θ ระหว่าง 2 เวกเตอร์นั้น ในที่นี้จะใช้ทฤษฎีผลคูณจุด (Dot Product) คือ $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}||\overline{AC}|\cos\theta$ และความสัมพันธ์ $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a_1a_2 + b_1b_2$ เมื่อ a_1, b_1 และ a_2, b_2 เป็นสมาชิกเวกเตอร์ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ

จาก $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a_1a_2 + b_1b_2$ จะได้ว่า

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a_1a_2 + b_1b_2 = (3)(1) + (4)(1) = 7$$

ดังนั้น $7 = (\sqrt{3^2 + 4^2})(\sqrt{1^2 + 1^2}) \cos\theta$

$= (5)(\sqrt{2}) \cos\theta$

นั่นคือ $\cos\theta = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$

จะได้ว่าขนาดมุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองคือ $\arccos(\dfrac{7}{5\sqrt{2}})$ **ตอบข้อ ข.**

2. กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\bar{u} + \bar{v} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ และ $\bar{u} - \bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$ จงหาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$

วิธีทำ สังเกตว่าโจทย์กำหนดผลบวกและผลต่างของสองเวกเตอร์มาให้ หน้าที่อันดับแรกของเราคือต้องหาเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ก่อน ดังนี้

จาก $\bar{u} + \bar{v} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ ----------❶

$\bar{u} - \bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ----------❷

นำ ❶ + ❷ จะได้ว่า

$2\bar{u} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$

$\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j}$ ----------❸

ข้อสังเกต 1: จากบทนิยามของเวกเตอร์จะได้ $a_1 = 2$ และ $b_1 = -1$

นำค่าจากสมการ ❸ ไปแทนลงในสมการ ❶ หรือ ❷ ในที่นี้จะเลือกแทนลงในสมการ ❶

จะได้ $(2\bar{i} - \bar{j}) + \bar{v} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$

ดังนั้น $\bar{v} = (3\bar{i} - 4\bar{j}) + [-(2\bar{i} - \bar{j})] = \bar{i} - 3\bar{j}$ ----------❹

ข้อสังเกต 2: จากบทนิยามของเวกเตอร์จะได้ $a_2 = 1$ และ $b_2 = -3$

นำค่าที่ได้จากข้อสังเกต 1 และข้อสังเกต 2 ไปหาค่าตามที่โจทย์ต้องการโดยใช้ผลคูณจุด

จาก $\bar{u} \cdot \bar{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

จะได้ว่า $= (2)(1) + (-1)(-3)$

$= 5$ **ตอบข้อ ค.**

3. ถ้า $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{5}$, $|\bar{u}| = \sqrt{3}$, $|\bar{v}|$ ไม่เท่ากับศูนย์ และ $\bar{u} \perp \bar{v}$ จงหาค่าของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\bar{u} \perp \bar{v}$ แสดงว่า θ เท่ากับ 90 องศา ซึ่ง cos 90 = 1

ดังนั้น จะได้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = 0$ **เฉลยข้อ ก.**

4. กำหนดให้ $\bar{u} = \bar{i} - \bar{j}$, $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ a, b ไม่เท่ากับศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\bar{u}$ ทำกับ $\bar{v}$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 4$ และ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ จงหาค่าของ $a^2 + b^2$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีผลคูณจุด คือ

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

$$(1)(a) + (-1)(b) = (\sqrt{2})(\sqrt{a^2+b^2})\cos\theta \quad \text{----------} ❶$$

พิจารณาหาค่า $\cos\theta$ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้คือ $\tan\theta = \frac{3}{4}$

โดยทฤษฎีบทของปีทากอรัส จะได้ว่า $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จากนั้นนำไปแทนค่าในสมการ ❶ จะได้

$$a - b = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}\left(\frac{4}{5}\right) \quad \text{----------} ❷$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 4$ ซึ่งเห็นได้ชัดจากสมการ ❶ ว่ามีค่าเท่ากับ $a - b$

ดังนั้นจึงได้ว่า $4 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}\left(\frac{4}{5}\right)$

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{4\times5}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

นั่นคือ $a^2 + b^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= \frac{25}{2} = 12.5$$

ตอบข้อ ง.

5. กำหนดให้ $|\bar{u}| = \sqrt{5}$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 5$ จงหาค่าของ $|\bar{u}-\bar{v}|$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีประยุกต์ของผลคูณจุด คือ

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \text{----------} ❶$$

และ $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v}$ ---------- ❷

แทนค่าที่โจทย์กำหนดลงในสมการ ❶ จะได้

$$25 = 5 + 9 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$

ดังนั้น $2\bar{u}\cdot\bar{v} = 11$ ---------- ❸ แทนค่าจากสมการ ❸ ลงในสมการ ❷

จะได้ $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = 5 + 9 - 11 = 3$

นั่นคือ $|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{3}$ **ตอบข้อ ก.**

6. กำหนดให้ $\bar{u} = (2k-1)\bar{i} + (k+1)\bar{j}$ โดยที่ k เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 4$ ถ้า S เป็นเซตของ k แล้วจงหาผลบวกของสมาชิกในเซต S ดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u> ใช้ทฤษฎีประยุกต์ของผลคูณจุด ดังนี้

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \text{----------} ❶$$

จะเห็นว่า $|\bar{u}|^2 = (2k-1)^2 + (k+1)^2$ และ $|\bar{v}|^2 = 2$

จาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = (2k-1)(1) + (k+1)(1)$

$= 3k$

จะได้ว่า $16 = [(2k-1)^2 + (k+1)^2] + (2) + 2(3k)$

$= [(4k^2 - 4k + 1) + (k^2 + 2k + 1)] + (2) + 6k$

$= (5k^2 - 2k + 2) + 2 + 6k$

$= 5k^2 + 4k + 4$

$5k^2 + 4k - 12 = 0$

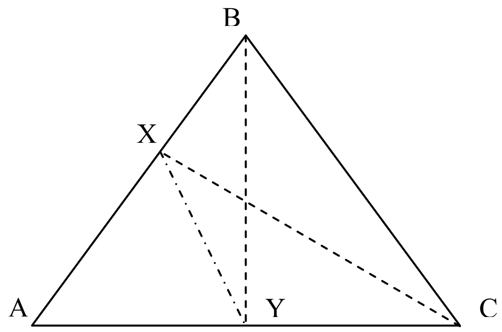
$(5k-6)(k+2) = 0$

$k = \frac{6}{5}$ หรือ -2

นั่นคือ ผลบวกทั้งหมดของค่า k มีค่าเท่ากับ $\frac{6}{5} + (-2) = -\frac{4}{5}$ **ตอบข้อ ง.**

7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยที่ $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$, X เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BA และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC ข้อใดกล่าวถูกต้องเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u> พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ดังต่อไปนี้



จากโจทย์ กำหนดว่า $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$ ดังนั้น $|\overline{BC}| = |\overline{BA} + \overline{AC}|$

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{BA} + \overline{AC}|^2 = |\overline{BA}|^2 + |\overline{AC}|^2 + 2\,\overline{BA}\cdot\overline{AC}$

$= |\overline{BA}|^2 + |\overline{AC}|^2 + 2|\overline{BA}||\overline{AC}|\cos\theta$

แต่เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจึงได้ว่า $\cos\theta = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{BA}|^2 + |\overline{AC}|^2 + |\overline{BA}||\overline{AC}|$ แสดงว่าข้อ ก. ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ข.

เนื่องจาก $\overline{BC} = \overline{BX} + \overline{XC}$ และ $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{BA}$ จะได้ว่า

$$\overline{XC} = \overline{BC} - \overline{BX} = \overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{BA}$$

$$= (\overline{BA} + \overline{AC}) - \frac{1}{2}\overline{BA} = \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BA}$$ แต่ $\overline{BA} = \overline{AC}$ จะได้ว่า

$$= \frac{3}{2}\overline{BA}$$ ดังนั้นข้อ ข. กล่าวถูกต้อง

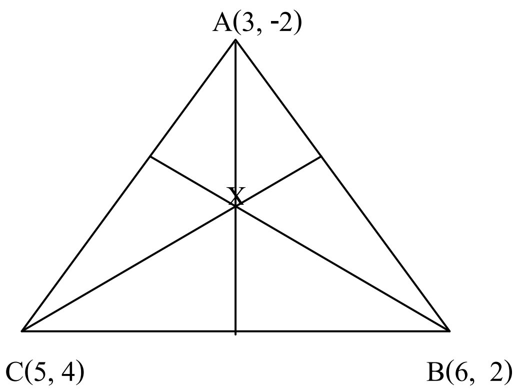
ต่อไปพิจารณาข้อ ค.

จากรูป จะได้ว่า $\overline{XY} = \overline{XA} + \overline{AY}$ แต่ $\overline{XA} = \frac{1}{2}\overline{BA}$ และ $\overline{AY} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ดังนั้น

$\overline{XY} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{AC}\right) = \frac{1}{2}\overline{BC}$ แสดงว่าข้อ ค. กล่าวถูกต้อง **ตอบข้อ ง.**

8. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นด้านประกอบมุมยอด ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากจุดกึ่งกลางของเวกเตอร์แต่ละอันให้ตัดกันที่จุด X ซึ่งอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ถ้าจุด A มีพิกัด (3, –2) จุด B มีพิกัด (6, 2) และจุด C มีพิกัด (5, 4) จงเขียนเวกเตอร์ $\overline{CX}$ ในรูป $a\bar{i} + b\bar{j}$

<u>**วิธีทำ**</u> จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดนำมาวาดรูปคร่าวๆ ได้ดังนี้



โจทย์ข้อนี้เป็นลักษณะผสมระหว่างเวกเตอร์กับเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่องจุดมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม

<u>**ทบทวน**</u> จุดมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมใดๆ คือ จุดตัดที่เกิดจากการลากเส้นตรงจากจุดยอดมุมทุกจุดลงไปตั้งฉากกับด้านตรงข้ามจุดยอดมุมนั้น ซึ่งในที่นี้จุด X คือจุดมัธยฐาน

จุดมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมใดๆ = $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$ เมื่อ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ เป็นสมาชิกของคู่อันดับ $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$

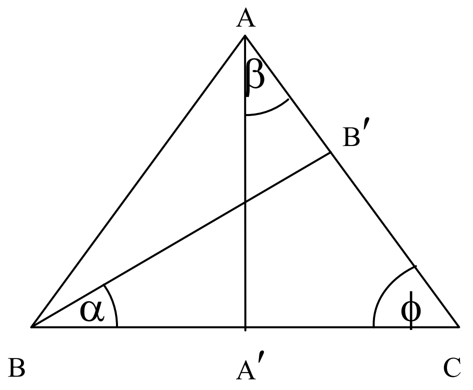
ดังนั้น พิกัดของจุด X คือ $\left(\frac{3+5+6}{3}, \frac{-2+4+2}{3}\right) = (\frac{14}{3}, \frac{4}{3})$

จะได้เวกเตอร์ $\overline{CX} = (\frac{14}{3} - 5)\bar{i} + (\frac{4}{3} - 4)\bar{j} = -\frac{1}{3}\bar{i} - \frac{8}{3}\bar{j}$ **ตอบข้อ ง.**

<u>ตอนที่ 2</u>

1. รูปสามเหลี่ยม ABC มีเวกเตอร์ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นด้านประกอบมุมยอด และมี $|\overline{AB}| : |\overline{AC}| : |\overline{BC}|$ $= 1 : 2 : 1$ ที่จุด A ลาก $AA' \perp \overline{BC}$ และที่จุด B ลาก $BB' \perp \overline{AC}$ จงแสดงการหาค่าของ $\dfrac{|AA'|}{|BB'|}$ โดยละเอียด

<u>วิธีทำ</u> วาดรูปตามโจทย์จะได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า

$$\overline{BB'} \cdot \overline{BC} = |\overline{BB'}||\overline{BC}| \cos\alpha \quad \text{----------❶}$$

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AC} = |\overline{AA'}||\overline{AC}| \cos\beta \quad \text{----------❷}$$

เมื่อ α และ β ได้แก่ มุม $B'BC$ และมุม $A'AC$ ตามลำดับ

นำ ❷ ÷ ❶ จะได้ว่า

$$\frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AC}}{\overline{BB'} \cdot \overline{BC}} = \frac{|\overline{AA'}||\overline{AC}|\cos\beta}{|\overline{BB'}||BC|\cos\alpha}$$

$$= 2\frac{|\overline{AA'}|\cos\beta}{|\overline{BB'}|\cos\alpha}$$

ดังนั้น $$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AC}}{\overline{BB'} \cdot \overline{BC}}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) \quad \text{----------❸}$$

แต่จากรูป $\alpha + \phi = 90^\circ$ และ $\beta + \phi = 90^\circ$ นั่นคือ $\alpha = \beta$

จากสมการ ❸ จึงได้ว่า

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AC}}{\overline{BB'} \cdot \overline{BC}}\right)$$

ตอบ

2. $\overline{AB} = \sqrt{3}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$, $\overline{BC} = \sqrt{2}\bar{i} - \sqrt{3}\bar{j}$ จงหาค่า k ซึ่งเป็นสเกลาร์ที่ทำให้ $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})k = 5$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$= (\sqrt{3}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}) + (\sqrt{2}\bar{i} - \sqrt{3}\bar{j})$

$= (\sqrt{3} + \sqrt{2})\bar{i} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})\bar{j}$

ดังนั้น $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})k = [(\sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})]k$

$= [3 + \sqrt{6} + 2 - \sqrt{6}]k$

$= 5k$

เนื่องจาก $5k = 5$

เพราะฉะนั้น $k = 1$ **ตอบ**

3. วงกลมวงหนึ่งซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด C(2, –5)

1) จะมีรัศมีเท่าใด ถ้าเวกเตอร์ที่เป็นเส้นสัมผัสวงกลมคือเวกเตอร์ $10\bar{i}$ (1 คะแนน)

2) จงหาว่าถ้าเลื่อนวงกลมนี้ไปโดยให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C' ซึ่งมี<u>เวกเตอร์ตำแหน่งเทียบกับจุด C</u> เป็น $8\bar{i} - 3\bar{j}$ เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด C และจุด C' จะมีความชันเท่าใด (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> 1) จะเห็นได้โดยชัดเจนว่า รัศมีของวงกลมนี้เท่ากับ 2 หน่วย เนื่องจากเวกเตอร์ $10\bar{i}$ ก็คือเวกเตอร์ที่ทับกับแกน X

2) เวกเตอร์ตำแหน่งเทียบกับจุด C คือ $8\bar{i} - 3\bar{j}$ แสดงว่า $\overline{CC'} = 8\bar{i} - 3\bar{j}$

สมมติว่า C' มีพิกัดคือ (a, b)

นั่นคือ (a, b) – (2, –5) = (8, –3)

แสดงว่า (a, b) = (8, –3) + (2, –5) = (10, –8) **ตอบ**