<u>**เฉลยแบบทดสอบเรื่องคณิตศาสตร์เชิงการจัดหมู่และความน่าจะเป็น**</u>

<u>**ตอนที่ 1**</u>

1. จะสร้างจำนวนเต็ม 6 หลักจากเลขโดด 0 – 9 โดยไม่ใช้ตัวเลขซ้ำกันได้กี่จำนวน

<u>**วิธีทำ**</u>

...	...	...	...	...	...
แสน	หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย

โจทย์เน้นว่า "จำนวนเต็ม" นั่นย่อมแสดงว่าทุกๆ หลักมีค่าประจำตำแหน่งแน่นอน

จะเห็นว่าเลขในหลักแสนที่ใช้ได้มีทั้งหมด 9 ตัว

เลขในหลักหมื่นที่ใช้ได้มีทั้งหมด 9 ตัว (นับเลข 0 ด้วยแต่ไม่นับตัวที่ใช้ไปในหลักแสน)

เลขในหลักพันที่ใช้ได้มีทั้งหมด $9 - 1 = 8$ ตัว (โจทย์บอกว่าใช้เลขไม่ซ้ำกันในแต่ละหลัก)

เลขในหลักร้อยที่ใช้ได้มีทั้งหมด $8 - 1 = 7$ ตัว

เลขในหลักสิบที่ใช้ได้มีทั้งหมด $7 - 1 = 6$ ตัว

เลขในหลักหน่วยที่ใช้ได้มีทั้งหมด $6 - 1 = 5$ ตัว

นั่นคือจะสร้างจำนวนเต็มตามเงื่อนไขดังกล่าวได้ = $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136{,}080$ จำนวน

ตอบข้อ ข.

2. เลขโดด 0 – 9 นำมาสร้างจำนวนเต็ม 4 หลักและหารด้วย 5 ลงตัวได้กี่จำนวน

<u>**วิธีทำ**</u> ลักษณะปัญหาข้อนี้คล้ายๆ กับข้อ 1 แต่มีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่าหลักหน่วยต้องเป็น 0 หรือ 5 เท่านั้น และไม่ต้องกังวลว่าจะใช้เลขซ้ำกันเพราะโจทย์ไม่ได้บอกเงื่อนไขนี้มา

...	...	...	...
พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย

จะได้ว่าหลักพันมีเลขที่ใช้ได้ทั้งหมด 9 ตัว

หลักร้อยมีเลขที่ใช้ได้ทั้งหมด 10 ตัว

หลักสิบมีเลขที่ใช้ได้ทั้งหมด 10 ตัว

หลักหน่วยมีเลขที่ใช้ได้ทั้งหมด 2 ตัว

ดังนั้น จะสร้างจำนวนเต็มได้ตามที่เงื่อนไขต้องการได้ทั้งหมด $9 \times 10 \times 10 \times 2 = 1{,}800$ จำนวน

ตอบข้อ ง.

3. นำผู้ชายและผู้หญิงจำนวนเท่ากันมายืนเรียงเป็นเส้นตรง โดยให้ผู้ชายยืนคู่กับผู้ชายและผู้หญิงยืนคู่กับผู้หญิง จะจัดได้ 1,152 วิธี อยากทราบว่าถ้าเลือกผู้หญิงและผู้ชายอย่างละ 2 คน มายืนเป็นเส้นตรงโดยให้ผู้ชายและผู้หญิงยืนสลับกันจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ สมมติให้จำนวนคู่ของผู้ชาย = จำนวนคู่ของผู้หญิง = n

พิจารณาแผนภาพต่อไปนี้

ชายคู่ที่ 1	หญิงคู่ที่ 1	ชายคู่ที่ 2	หญิงคู่ที่ 2	ชายคู่ที่ 3	หญิงคู่ที่ 3	…

จะเห็นว่าชายคู่ที่ 1 มีชายรวม 2 คน

ชายคู่ที่ 2 มีชายรวมกับคู่แรกเป็น 4 คน

ชายคู่ที่ 3 มีชายรวมกับคู่ที่สองเป็น 6 คน

… …

ดังนั้น ชายคู่ที่ n มีชายรวมกับคู่ที่ n – 1 เป็น 2n คน

ในทำนองเดียวกันสำหรับผู้หญิง จะได้ว่าหญิงคู่ที่ n มีหญิงรวมกับหญิงคู่ที่ n – 1 เป็น 2n คน

เพราะฉะนั้นในบรรดาชายทั้งหมด 2n คนสลับที่กันได้ (2n)! สำหรับหญิง 2n คนสลับได้ (2n)! คน เช่นกัน นอกจากนี้สำหรับกลุ่มของชายและกลุ่มของหญิงยังสำหรับกันได้อีก 2 วิธี

$$2 \times (2n)! \times (2n)! = 1,152$$

$$(2n)!^2 = 576$$

$$(2n)! = 24 = 4!$$

$$2n = 4$$

$$n = 2$$

นั่นคือ ผู้ชายและผู้หญิงมีจำนวนอย่างละ 2 คู่ (รวมทั้งหมด 8 คน)

ต่อไป เลือกผู้ชายและผู้หญิงออกมาอย่างละ 2 คนมายืนเป็นเส้นตรงโดยให้ผู้ชายยืนสลับกับผู้หญิง

จำนวนวิธีเลือกผู้ชาย = จำนวนวิธีเลือกผู้หญิง = $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธียืนเป็นเส้นตรงโดยชาย – หญิงยืนสลับกันได้ = $6 \times 6 \times 2 = 72$ วิธี

ตอบข้อ ข.

4. เด็กชายคนหนึ่งและเด็กหญิงอีกสี่คนเป็นพี่น้องกัน ต้องการจัดระเบียบห้องนอนที่มีอยู่ 3 ห้อง โดยมีเงื่อนไขว่าเด็กชายต้องนอนคนเดียว ส่วนเด็กหญิงนอนห้องละไม่เกิน 2 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดเด็กทั้งห้าคนเข้าห้องนอนทั้ง 3 ห้องดังกล่าว

<u>**วิธีทำ**</u> วาดแผนภาพห้องนอน 3 ห้องออกมาได้ดังนี้

❶	❷	❸

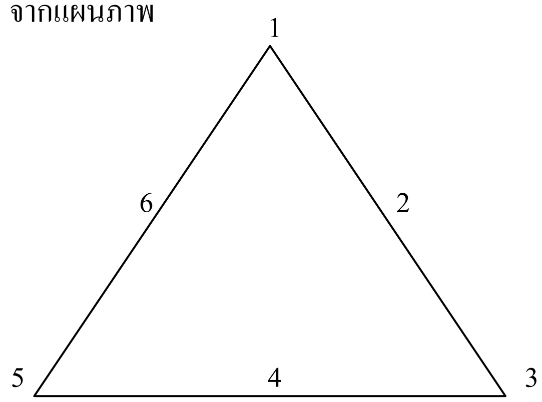
พิจารณาวิธีจัดเข้าห้องของเด็กชาย เนื่องจากเด็กชายสามารถนอนได้เพียงคนเดียวจึงเลือกได้ 3 วิธี จะเห็นว่าขณะนี้ห้องที่จะให้เด็กหญิงได้เลือกนอนเหลือเพียง 2 ห้อง ต่อไปพิจารณาวิธีจัดเข้าห้องของเด็กหญิง 4 คน เนื่องจากแต่ละห้องจะมีเด็กหญิงนอนได้ไม่เกินห้องละ 2 คน สมมติว่ามีเด็กหญิงคนหนึ่งนอนเพียงคนเดียว ห้องที่เหลือก็นอนได้ 3 คนซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะเงื่อนไขบอกเราว่านอนได้ไม่เกินห้องละ 2 คน ดังนั้นเด็กหญิงจึงนอนได้ห้องละ 2 คนเท่านั้น ต่อไปเราจะหาว่ามีกี่วิธีในการจัดเด็กหญิงเข้านอนในแต่ละห้อง

"ห้องแรก" สามารถจัดได้ 4 วิธี "ห้องที่สอง" จัดได้ $4 - 1 = 3$ วิธี

เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีการจัดเด็กทั้งห้าคนเข้าห้องนอนเท่ากับ $3 \times 4 \times 3 = 36$ วิธี **ตอบข้อ ข.**

5. ชายหญิงรวม 6 คนยืนเป็นเส้นตรงรูปสามเหลี่ยมดังรูป ถ้าจัดให้คนที่ 1, 3, 5 สลับตำแหน่งกัน 1 ครั้งและคนที่ 2, 4, 6 ก็สลับตำแหน่งกัน 1 ครั้งเช่นกัน มีเงื่อนไขว่าคนที่ 1, 3, 5 จะสลับตำแหน่งกับคนที่ 2, 4, 6 ไม่ได้ จงหาว่ามีจำนวนทั้งสิ้นกี่วิธีที่จะยืนสลับตำแหน่งกันโดยไม่มีใครยืนซ้ำในตำแหน่งเดิม

<u>**วิธีทำ**</u> จากแผนภาพ



คนที่ 1, 3, 5 สลับตำแหน่งกัน 1 ครั้ง จำนวนวิธีสลับกันเท่ากับ $3! = 6$ วิธี

ในทำนองเดียวกันคนที่ 2, 4, 6 ก็สลับตำแหน่งกัน 1 ครั้ง จำนวนวิธีสลับก็เท่ากับ 6 วิธีเช่นกัน

ดังนั้น จำนวนวิธียืนสลับตำแหน่ง $= 6 + 6 = 12$ วิธี **ตอบข้อ ข.**

6. โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรที่แตกต่างกันอยู่ 6 เครื่อง ในแต่ละวันจะมีเครื่องที่ถูกใช้งานอยู่ 4 เครื่องโดยมีพนักงานประจำอยู่เครื่องละ 1 คน ถ้าพนักงานที่มีหน้าที่ประจำเครื่องจักรมีทั้งหมด 6 คน จงหาว่าพนักงานแต่ละคนจะได้ทำงานดังกล่าวคนละอย่างน้อยกี่วันในแต่ละสัปดาห์ สมมติว่าพนักงานแต่ละคนทำงานเพียงกะเดียวในแต่ละวัน

__วิธีทำ__ พิจารณาแผนภาพ

M1	M2	M3	M4	M5	M6	เลือกคนทำงานในแต่ละวัน

P1	P2	P3	P4	P5	P6	เลือกเครื่องจักรในแต่ละวัน

จำนวนวิธีเลือกคนทำงานในแต่ละวัน = จำนวนวิธีเลือกเครื่องจักรทำงานในแต่ละวัน

$$= \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ วิธี}$$

ในที่นี้จะสังเกตว่าไม่สนใจว่าจะได้เครื่องจักรตัวไหน ดังนั้นความน่าจะเป็นที่พนักงานคนหนึ่งจะได้ทำงานในแต่ละวันเท่ากับ $\frac{1}{15}$ แต่ว่าเครื่องจักรมีอยู่ 4 เครื่อง นั่นคือจำนวนวันที่น้อยที่สุดในแต่ละสัปดาห์ที่พนักงานแต่ละคนจะได้ทำงานจึงเท่ากับ $1 \times 4 = 4$ วัน **ตอบข้อ ก.**

7. จงหาจำนวนนักเรียนหญิงที่ยืนถ่ายรูปหมู่กับนักเรียนชายจำนวน 4 คนที่มีจำนวนวิธีการยืนแบบไม่มีเงื่อนไขเท่ากับ 5,040 วิธี

__วิธีทำ__ สมมติให้ n เป็นจำนวนนักเรียนหญิง จะได้ว่า

$(n + 4)! = 5,040$

เนื่องจาก $5,040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

ดังนั้น $5,040 = 7!$

จะได้ว่า $n + 4 = 7$

นั่นคือ $n = 3$

ดังนั้น จำนวนนักเรียนหญิงเท่ากับ 3 คน **ตอบข้อ ก.**

8. ถ้าพจน์ที่ 4 จากการกระจาย $(2x - y)^n$ คือ $-1792x^5y^3$ และพจน์ที่ 7 คือ $112x^2y^6$ แล้ว $n^2 - \frac{1}{n-1}$ ใกล้เคียงกับค่าใดต่อไปนี้

__วิธีทำ__ โจทย์ปัญหาข้อนี้เป็นลักษณะของการประยุกต์ทฤษฎีบททวินาม

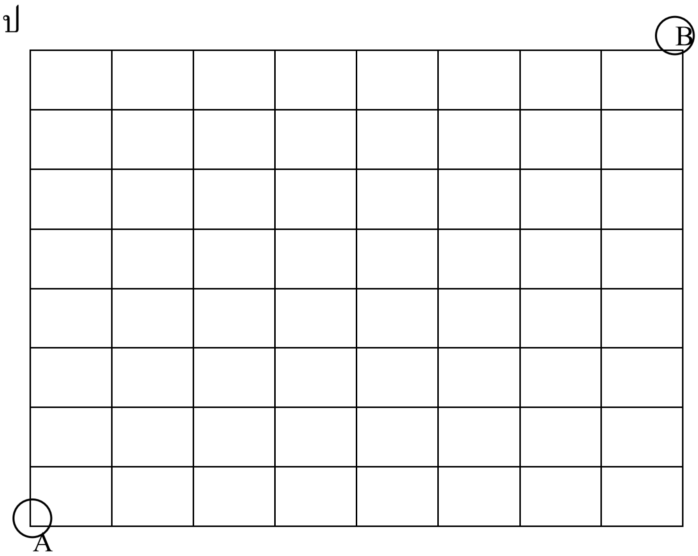
จากสูตร $T_{r+1} = \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$

เพราะฉะนั้น $T_{3+1} = \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}(2x)^{n-r}(-y)^{r} = -1792x^{5}y^{3} = \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}2^{n-3}x^{n-r}(-1)\,y^{3}$

นั่นคือ $n - 3 = 5$ จะได้ว่า $n = 8$

จะได้ว่า $n^2 - \frac{1}{n-1} = 8^2 - \frac{1}{8-1} = 64 - \frac{1}{7} \approx 63 \approx 60$ **ตอบข้อ ค.**

9. จงหาจำนวนวิธีลากเส้นจากจุด A ไปยังจุด B โดยให้ผ่านแต่ละช่องของตารางหมากรุกขนาด 8 × 8 หน่วย เพียงครั้งเดียว ดังรูป



<u>**วิธีทำ**</u> โจทย์ปัญหาข้อนี้คล้ายๆ กับการเรียงสับเปลี่ยนเมื่อมีสิ่งซ้ำกัน เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

จำนวนวิธีลากเส้นจากจุด A ไป B ตามเงื่อนไขที่กำหนด

$$= \frac{16!}{8!8!} = \frac{16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}$$

$= 12{,}870$ วิธี **ตอบข้อ ข.**

10. กล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่ 10 ใบ แต่ละใบเขียนเลขโดด 0 – 9 ไม่ซ้ำกัน ถ้าสุ่มหยิบสลากมา 2 ใบโดยเมื่อหยิบใบแรกมาแล้วไม่ต้องใส่คืนจากนั้นค่อยหยิบใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากใบใดใบหนึ่งที่เลขโดดบนสลากนั้นหารด้วย 3 ลงตัว

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ P(A) เป็นความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากใบที่ 1 โดยเลขโดดบนสลากใบที่ 1 หารด้วย 3 ลงตัว

P(B) เป็นความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากใบที่ 2 โดยเลขโดดบนสลากใบที่ 2 หารด้วย 3 ลงตัว

และให้ $P(A \cup B)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากใบที่ 1 หรือใบที่ 2 โดยเลขโดดบนสลากใบที่ 1 หรือใบที่ 2 หารด้วย 3 ลงตัว

จำนวนแซมเปิลสเปซของเหตุการณ์ A; $n(A) = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

ในทำนองเดียวกัน จำนวนแซมเปิลสเปซของเหตุการณ์ B; $n(B) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

จำนวนแซมเปิลสเปซของเหตุการณ์ $A \cap B$; $n(A \cap B) = 3$

เหตุการณ์ A; $n(E_A) = 3$ ในทำนองเดียวกันสำหรับเหตุการณ์ B; $n(E_B) = 3$

เหตุการณ์ $A \cap B$; $n(E_{A \cap B}) = 1$

จากสูตร
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{9} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

ตอบข้อ ค.

11. ผู้เชี่ยวชาญคอมพิวเตอร์คนหนึ่งต้องการเข้ารหัสข้อมูลอย่างง่าย โดยการใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษผสมกับเลขโดด 0 – 9 เขาต้องการให้รหัสที่สร้างขึ้นนี้มีความยาวไม่เกิน 255 ตัวอักษร จงหาว่าถ้าแฮกเกอร์ต้องการขโมยรหัสนี้ แฮกเกอร์จะต้องเดาอย่างมากกี่ครั้งจึงจะเดารหัสนี้ได้ถูกต้อง

<u>**วิธีทำ**</u> สร้างสตริง (string) ขึ้นมาความยาวไม่เกิน 255 ตัวอักษร (เต็มที่ได้ 255) จะเห็นว่าแต่ละสับสตริง (substring) จะสามารถใส่ตัวอักษรภาษาอังกฤษหรือตัวเลขโดดก็ได้ไม่มีกฎเกณฑ์บังคับ ซึ่งสามารถทำได้ $26 + 9 = 35$ วิธี ในเมื่อสตริงมีความยาว 255 หน่วย ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดจึงเท่ากับ $35 \times 255 = 8{,}925$ วิธี

นั่นคือ แฮกเกอร์จะต้องเดาเป็นจำนวนครั้งอย่างมาก 8,925 ครั้งจึงจะเดาถูก **ตอบข้อ ก.**

12. ฝ่ายทะเบียนของโรงเรียนมัธยมแห่งหนึ่งมีหน้าที่ออกเลขประจำตัวให้กับนักเรียนใหม่ทุกปีการศึกษา โดยมีข้อกำหนดว่าเลขประจำตัวนักเรียนจะมีทั้งหมด 7 หลัก โดยสองหลักแรกนับจากทางซ้ายเป็นเลขปีการศึกษา หลักที่สามเป็นเลขแทนชั้นปีของนักเรียน ส่วนอีกสี่หลักที่เหลือจะให้คอมพิวเตอร์สุ่มออกมา จงหาจำนวนเลขประจำตัวทั้งหมดที่ฝ่ายทะเบียนของโรงเรียนนี้จะออกให้ได้ในปีการศึกษาหนึ่งๆ

<u>**วิธีทำ**</u>

❶	❷	❸	❹	❺	❻	❼

จากโจทย์จะเห็นว่าหลักที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงคือหลักที่ 1 – 3 นั่นคือจำนวนเลขประจำตัวทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับจำนวนวิธีในการสุ่มเลขขึ้นมาทั้ง 4 หลักที่เหลือของคอมพิวเตอร์

เนื่องจากเลขในหลักที่ 4 – 7 จะเป็นเลขโดดตัวใดก็ได้ จึงมีวิธีสุ่มทั้งหมด

$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ วิธี

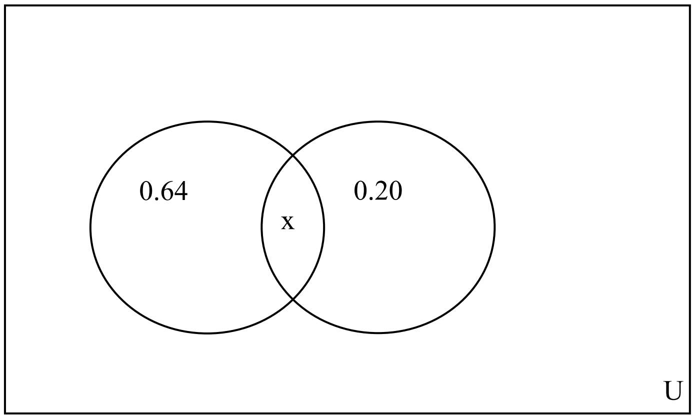
ดังนั้น จำนวนเลขประจำตัวทั้งหมดที่ฝ่ายทะเบียนสามารถออกให้ได้เท่ากับ 10,000 จำนวน

ตอบข้อ ค.

13. ในฤดูฝน สำหรับแต่ละวันสมมติว่าโอกาสที่ฝนจะตกอย่างเดียวคิดเป็นร้อยละ 64 โอกาสที่จะมีแดดออกอย่างเดียวเท่ากับร้อยละ 20 จงหาว่าโอกาสที่จะมีทั้งแดดออกและฝนตกในวันเดียวกันมีค่าเท่าใด

<u>**วิธีทำ**</u> ลองใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ จะเห็นได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

สมมติให้ x แทนความน่าจะเป็นที่จะมีทั้งแดดออกและฝนตกในวันเดียวกัน



จากแผนภาพจะได้ว่า $0.64 + x + 0.20 = 1$

แก้สมการได้ $x = 1 - 0.64 - 0.20 = 0.16$

นั่นคือ โอกาสที่จะมีทั้งฝนตกและแดดออกในวันเดียวกันเท่ากับ 0.16 **ตอบข้อ ก.**

14. จงหาความน่าจะเป็นที่สลากกินแบ่งรัฐบาลในแต่ละงวดจะออกเลขท้าย 2 ตัวเป็นจำนวนเฉพาะ หรือหารด้วย 7 ลงตัว

<u>วิธีทำ</u> สลากกินแบ่งรัฐบาลมี 6 หลัก ดังแผนภาพ

❶	❷	❸	❹	❺	❻

จำนวนแซมเปิลสเปซ $= 10^6$

เหตุการณ์ที่จะออกเลขท้าย 2 ตัวเป็นจำนวนเฉพาะ

$E_1 = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$

$n(E_1) = 21$

$E_2 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$

$n(E_2) = 14$

$E_1 \cap E_2 = \{\}$; $n(E_1 \cap E_2) = 0$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่สลากกินแบ่งรัฐบาลในแต่ละงวดจะออกเลขท้าย 2 ตัวเป็นจำนวนเฉพาะหรือหารด้วย 7 ลงตัว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{21}{10^6} + \frac{14}{10^6} - 0$$

$$= \frac{35}{10^6}$$

ตอบข้อ ค.

15. ในการเล่นเก้าอี้ดนตรี จะมีผู้เล่นมากกว่าจำนวนเก้าอี้อยู่ 1 เสมอ จงหาว่าจะต้องเล่นเก้าอี้ดนตรีทั้งสิ้นกี่รอบจึงจะเหลือผู้เล่นเพียงคนเดียว (สมมติว่ามีผู้เล่นจำนวน n คน และให้ตอบในเทอมของ n)

วิธีทำ เริ่มต้นมีผู้เล่น n คน

เหลือผู้เล่น $n-1$ คน เมื่อผ่านไปแล้ว 1 รอบ

เหลือผู้เล่น $n-2$ คน เมื่อผ่านไปแล้ว 2 รอบ

เหลือผู้เล่น $n-3$ คน เมื่อผ่านไปแล้ว 3 รอบ

... ...

เหลือผู้เล่น 1 คน เมื่อผ่านไปแล้ว $n-1$ รอบ

เพราะฉะนั้น จะต้องเล่นเก้าอี้ดนตรีทั้งหมด $n-1$ รอบจึงจะเหลือผู้เล่นเพียงคนเดียว **ตอบข้อ ข.**

16. ในงานสมรสหมู่ครั้งหนึ่งมีคู่สมรสทั้งหมด 30 คู่ ในจำนวนนี้คู่สมรสที่เป็นหญิงสวมแว่นทั้งหมด 11 คน คู่สมรสที่เป็นชายสวมแว่นทั้งหมด 6 คน เจ้าภาพกำหนดให้คู่สมรสที่สวมแว่นทั้งคู่ขึ้นไปกล่าวบนเวทีจงหาความน่าจะเป็นที่จะมีคู่สมรสที่คนใดคนหนึ่งสวมแว่นขึ้นไปกล่าวบนเวที

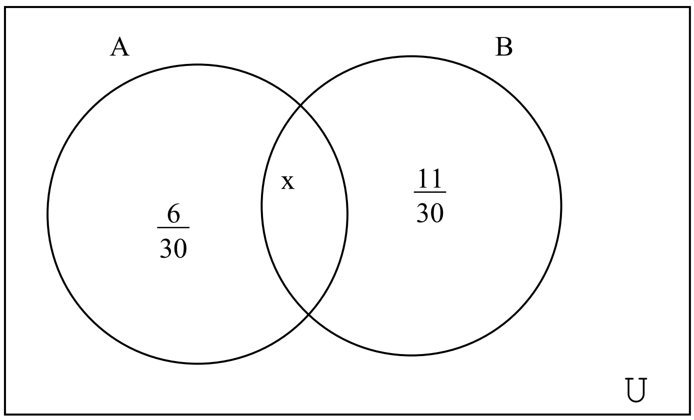
วิธีทำ ให้ P(A) = ความน่าจะเป็นที่คู่สมรสที่เป็นชายสวมแว่นจะขึ้นไปกล่าวบนเวที = $\frac{6}{30}$

P(B) = ความน่าจะเป็นที่คู่สมรสที่เป็นหญิงสวมแว่นจะขึ้นไปกล่าวบนเวที = $\frac{11}{30}$

$P(A \cup B)$ = ความน่าจะเป็นที่คู่สมรสที่เป็นชายหรือหญิงสวมแว่นขึ้นไปกล่าวบนเวที

และให้ x แทนความน่าจะเป็นที่จะมีคู่สมรสทั้งชายและหญิงสวมแว่นทั้งคู่ขึ้นไปกล่าวบนเวที

วาดแผนภาพเวนน์ได้ดังนี้



จะได้ว่า $\frac{6}{30} + x + \frac{11}{30} = 1$ นั่นคือ $x = 1 - \frac{6}{30} - \frac{11}{30} = \frac{13}{30}$

จากสูตร $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{6}{30} + \frac{23}{30} - \frac{13}{30}$$

$$= \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

ตอบข้อ ก.

17. คนจัดดอกไม้มีดอกไม้ชนิดเดียวกันแต่คละสีดังนี้ สีแดง 6 ดอก สีเหลือง 3 ดอก และสีชมพู 3 ดอก เขาต้องการจัดดอกไม้ใส่ลงในแจกัน 3 ใบที่มีขนาดต่างๆ กันคือ ขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดดอกไม้ลงในแจกันทั้งสามใบโดยที่แจกันแต่ละใบจะต้องมีดอกไม้ครบทุกสี

<u>วิธีทำ</u> สังเกตว่าการจัดดอกไม้ตามโจทย์ข้อนี้ไม่สนใจความสำคัญของแจกัน นั่นคือจะใส่ใบไหนก็ได้
เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดจึงเท่ากับจำนวนวิธีใส่ดอกไม้ทุกชนิด $= 6 \times 3 \times 3 = 54$ วิธี

ตอบข้อ ค.

18. นักชีววิทยาต้องการทดสอบความสามารถของลิงในการรับรู้เชิงจำนวน (หมายความว่าสามารถทราบได้ว่าเลขนี้มีค่าเท่าใด) จึงทำการทดลองโดยให้ลิงกดปุ่มบนแป้นโทรศัพท์เมื่อนักชีววิทยายกแผ่นป้ายแสดงจำนวน เช่น เมื่อนักชีววิทยายกแผ่นป้ายเลข 4 ก็หมายความว่าลิงจะต้องกดแป้นเลข 4 จึงจะถือว่าถูกต้อง ถ้านักชีววิทยาทำการทดลองนี้เพียง 5 ครั้งโดยสุ่มเลขตั้งแต่ 0 – 9 ไม่ซ้ำกันทั้ง 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลิงจะทายถูกครบทุกครั้ง

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีสุ่มเลขโดด 0 – 9 $= P_{9,5} = \dfrac{9!}{(9-5)!} = \dfrac{9!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15{,}120$ วิธี
วิธีที่ลิงจะทายถูก = {ถูก 1 ครั้ง, ถูก 2 ครั้ง, ถูก 3 ครั้ง, ถูก 4 ครั้ง, ถูกหมดทุกครั้ง, ผิดหมดทุกครั้ง}
นั่นคือ จำนวนวิธีที่ลิงจะทายถูก = 1
เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ลิงจะทายถูกครบทุกครั้ง $= \dfrac{1}{15{,}120}$ **ตอบข้อ ข.**

19. (พิจารณาข้อมูลที่โจทย์กำหนด)จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อสุ่มตัวเลขจากเซต B ตัวหนึ่งและเซต C อีกตัวหนึ่งแล้วผลบวกของตัวเลขทั้งสองจำนวนนั้นจะไม่อยู่ในเซต A

<u>วิธีทำ</u> โจทย์กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 20\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 19\}$
จำนวนวิธีสุ่มตัวเลขจากเซต B และเซต C อย่างละหนึ่งตัว $= \binom{11}{1} \times \binom{10}{1} = 110$ วิธี
ผลบวกของตัวเลขไม่อยู่ในเซต A แสดงว่าผลบวกจะต้องน้อยกว่า 0 หรือมากกว่า 20 ซึ่งจะเห็นว่าผลบวกน้อยกว่า 0 ย่อมเป็นไปไม่ได้ ฉะนั้นจึงหาเพียงจำนวนสมาชิกที่มีผลบวกมากกว่า 20
พิจารณาชุดของอสมการต่อไปนี้

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 19 > 20 \\ 4 + 19 > 20 \\ 6 + 19 > 20 \\ \ldots \\ 20 + 19 > 20 \end{array}\right\} \text{จำนวนวิธีที่จะทำได้ตามเงื่อนไขเท่ากับ 11 วิธี}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 17 < 20 \\ 4 + 17 > 20 \\ 6 + 17 > 20 \\ \dots \\ 20 + 17 > 20 \end{array}\right\} \text{จำนวนวิธีที่จะทำได้ตามเงื่อนไขเท่ากับ 10 วิธี}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 15 < 20 \\ 4 + 15 < 20 \\ 6 + 15 > 20 \\ \dots \\ 20 + 15 > 20 \end{array}\right\} \text{จำนวนวิธีที่จะทำได้ตามเงื่อนไขเท่ากับ 9 วิธี}$$

…

…

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 3 < 20 \\ 4 + 3 < 20 \\ 6 + 3 < 20 \\ 8 + 3 < 20 \\ 10 + 3 < 20 \\ 12 + 3 < 20 \\ 14 + 3 < 20 \\ 16 + 3 < 20 \\ 18 + 3 > 20 \end{array}\right\} \text{จำนวนวิธีที่จะทำได้ตามเงื่อนไขเท่ากับ 1 วิธี}$$

…

…

จะเห็นว่าจำนวนวิธีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขจะลดลงทีละ 1 วิธี เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะบวกสมาชิกให้ได้มากกว่า 20 เท่ากับ $11 + 10 + 9 + \dots + 3 + 2 + 1 + 0 = 66$ วิธี

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่เมื่อสุ่มตัวเลขจากทั้ง B, C มาเซตละ 1 ตัว ผลบวกของทั้งสองสมาชิกจะมากกว่า 20 เท่ากับ $\frac{66}{110} = \frac{3}{5}$ **ตอบข้อ ค.**

20. สมมติว่าความน่าจะเป็นที่เมื่อท่านโดยสารเครื่องบินแล้วเครื่องจะประสบอุบัติเหตุตกเท่ากับ 0.0001 ความน่าจะเป็นที่ท่านจะประสบอุบัติเหตุเมื่อโดยสารรถไฟเท่ากับ 0.0005 และความน่าจะเป็นที่ท่านจะประสบอุบัติเหตุทางรถยนต์เท่ากับ 0.005 ความน่าจะเป็นที่ท่านจะประสบอุบัติเหตุพร้อมๆ กันทั้งสองอย่างเท่ากับ

ศูนย์ และความน่าจะเป็นที่ท่านจะประสบอุบัติเหตุพร้อมๆ กันทั้งสามทางเท่ากับศูนย์อีกเช่นกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ท่านจะประสบอุบัติเหตุเมื่อท่านโดยสารรถไฟหรือรถยนต์หรือเมื่อโดยสารเครื่องบิน

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ที่จะประสบอุบัติเหตุเครื่องบินตก ดังนั้น $P(A) = 0.0001$

B แทนเหตุการณ์ที่จะประสบอุบัติเหตุทางรถไฟ ดังนั้น $P(B) = 0.0005$

และ C แทนเหตุการณ์ที่จะประสบอุบัติเหตุทางรถยนต์ ดังนั้น $P(C) = 0.005$

$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = 0$

และ $P(A \cap B \cap C) = 0$

โจทย์ต้องการทราบค่าของ $P(A \cup B \cup C)$

จากสูตร
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C)] \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.0001 + 0.0005 + 0.005 - 0 + 0 \\ &= 0.0056 \end{aligned}$$

ตอบข้อ ข.

<u>ตอนที่ 2</u>

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1) $r!\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (3 คะแนน)

2) $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$ (3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> 1) เนื่องจาก $r!\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = r!\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

2) เนื่องจาก $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$ **ตอบ**

2. จงพิสูจน์ว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงเก้าอี้จำนวน k ตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดเป็นวงกลมมีค่าเท่ากับ $(k-1)!$ (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณากรณีการจัดเรียงเก้าอี้ k ตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดเป็นเส้นตรง จะเห็นได้ว่าจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเรียงเท่ากับ k! วิธี ต่อไปเมื่อนำเก้าอี้จำนวนนี้ไปจัดเป็นวงกลมจะสังเกตได้ว่าเก้าอี้ตัวหนึ่งจะเป็นทั้งจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของวงกลมนั้น เสมือนว่ามีเก้าอี้เพิ่มเข้ามาอีก 1 ตัว แต่ความจริงแล้วไม่ใช่ ดังนั้นจึงต้องหักออก 1 นั่นคือจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเก้าอี้เป็นวงกลมเท่ากับ $(k-1)!$ วิธี **ตอบ**

3. กำหนดให้ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกัน (disjoint events) จงแสดงว่า

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก A, B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แสดงว่า $A \cap B = \varnothing$

และ $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$ **ตอบ**

4. นิยาม A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ และ $P(A \mid B)$ คือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ที่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ B โดยที่ $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ถ้า A, B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จงแสดงว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> จากนิยามที่โจทย์กำหนดให้ คือ $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

เนื่องจาก A, B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แสดงว่า $P(A \mid B) = P(A)$ แทนค่านี้ลงในนิยามข้างบน จะได้ว่า $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ นั่นคือ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ **ตอบ**

5. จงแสดงว่าจำนวนสับเซตทั้งหมดของเซตที่มีสมาชิก n ตัวมีค่าเท่ากับ 2^n (2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> จากทฤษฎีบททวินาม คือ $(a + b)^n$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$$

แทนค่า $a = b = 1$ จะได้ว่า

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + 1$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n} \quad \text{---------(*)}$$

กำหนดให้ A เป็นเซตใดๆ ที่มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า

เลือกสมาชิกจากเซต A มา 0 ตัว แสดงว่าเลือกได้ $\binom{n}{0}$ วิธี

เลือกสมาชิกจากเซต A มา 1 ตัว แสดงว่าเลือกได้ $\binom{n}{1}$ วิธี

เลือกสมาชิกจากเซต A มา 2 ตัว แสดงว่าเลือกได้ $\binom{n}{2}$ วิธี

… … … … … … … … … … … … … …

เลือกสมาชิกจากเซต A มา n ตัว แสดงว่าเลือกได้ $\binom{n}{n}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก n ตัว เท่ากับ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} +$

$\ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n}$ ----------(**)

แสดงว่าสมการ (*) เท่ากับสมการ (**) นั่นคือเป็นไปตามที่ต้องการ **ตอบ**

6. จงหารูปแบบของ $(1-x)^n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ (2 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบททวินาม คือ $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

แทนค่า $a = 1, b = -x$ จะได้ว่า

$$(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-x)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} [(-1)(x)]^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r x^r$$ **ตอบ**

7. กำหนดให้ A, B, C เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ U จงแสดงว่า

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$(3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จาก $P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C]$

$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$

แต่ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ จะได้ว่า

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C)$

$- P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$

$+ P(A \cap B \cap C)$ **ตอบ**

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ