<u>**เฉลยแบบทดสอบเรื่อง กำหนดการเชิงเส้น**</u>

<u>**ตอนที่ 1**</u>

1. กำหนดให้ P เป็นสมการจุดประสงค์ โดยที่ $P = 3x + y$ และมีอสมการข้อจำกัดดังต่อไปนี้

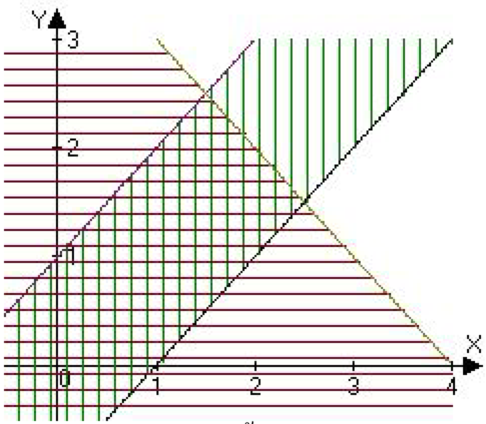
$x + y \leq 4$

$|x - y| < 1$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดของ P (ถ้ามี)

<u>**วิธีทำ**</u> นำอสมการข้อจำกัดที่โจทย์กำหนดให้มาวาดกราฟจะได้ดังนี้



บริเวณที่จะนำมาพิจารณาได้แก่บริเวณพื้นที่ที่เป็นรูปลายกระดานหมากรุกและอยู่ในควอดแรนต์ที่ 1 ซึ่งมีจุดมุม ได้แก่ (0, 0), (0, 1), (1, 0), $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$

จะได้ว่า

$$P(0, 0) = 3(0) + (0) = 0$$

$$P(0, 1) = 3(0) + (1) = 1$$

$$P(1, 0) = 3(1) + (0) = 3$$

$$P(\frac{5}{2},\frac{3}{2}) = 3(\frac{5}{2}) + (\frac{3}{2}) = 9$$

$$P(\frac{3}{2},\frac{5}{2}) = 3(\frac{3}{2}) + (\frac{5}{2}) = 7$$

เพราะฉะนั้น ค่าต่ำสุด คือ 0 และค่าสูงสุด คือ 9 **ตอบ**

2. กำหนดให้ P เป็นสมการจุดประสงค์โดยที่ $P = 6x + 7y$ และมีอสมการข้อกำหนดดังต่อไปนี้

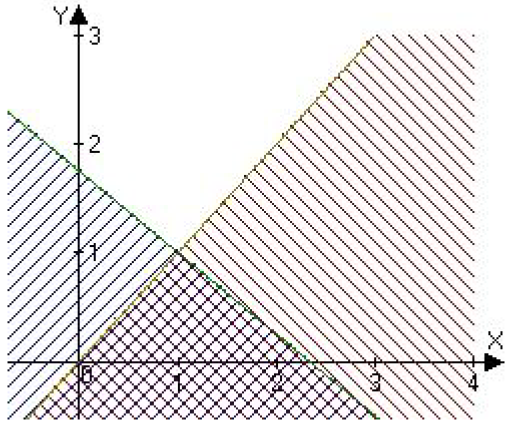
$3x + 4y \leq 7$

$x - y \geq 0$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดของ P (ถ้ามี)

<u>**วิธีทำ**</u> วาดกราฟของอสมการข้อจำกัดได้ดังนี้



จากกราฟ บริเวณที่จะทำการพิจารณาก็คือบริเวณที่เป็นรูปสามเหลี่ยมลายตารางหมากรุกส่วนที่อยู่ในควอดแรนต์ที่ 1 หาจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้ $(0, 0), (\frac{7}{3}, 0), (1, 1)$

เพราะฉะนั้น $P(0, 0) = 6(0) + 7(0) = 0$

$P(\frac{7}{3}, 0) = 6(\frac{7}{3}) + 7(0) = 14$

$P(1, 1) = 6(1) + 7(1) = 13$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 และค่าสูงสุดเท่ากับ 14 **ตอบ**

3. กำหนดให้ P เป็นสมการจุดประสงค์ โดยที่ $P = 3x + y$ และมีสมการข้อกำหนดดังต่อไปนี้

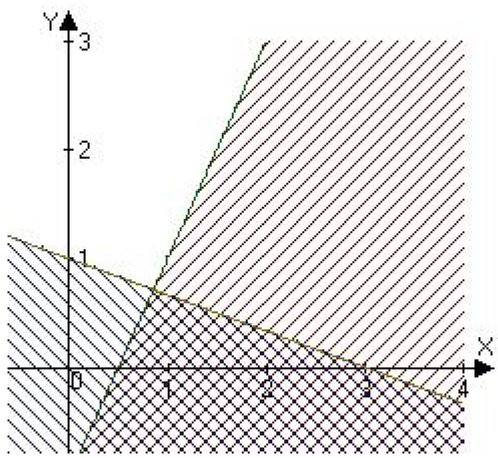
$2x - y \geq 1$

$x + 3y \leq 3$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดของ P (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัดได้ดังนี้



จากกราฟ บริเวณที่เป็นรูปสามเหลี่ยมตาหมากรุกส่วนที่อยู่ในควอดแรนต์ที่ 1 จะเป็นส่วนที่เรา

ต้องพิจารณา ซึ่งในที่นี้สามารถหาจุดมุมได้ดังนี้ คือ $(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}), (\frac{1}{2}, 0), (3, 0)$

ดังนั้น $P(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}) = 3(\frac{6}{7}) + (\frac{5}{7}) = \frac{23}{7}$,

$P(\frac{1}{2}, 0) = 3(\frac{1}{2}) + (0) = \frac{3}{2}$

และ $P(3, 0) = 3(3) + (0) = 9$

จะได้ว่าค่าต่ำสุดเท่ากับ $\frac{3}{2}$ และค่าสูงสุดเท่ากับ 9 **ตอบ**

<u>ตอนที่ 2</u>

1. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ สินค้า A และสินค้า B ซึ่งเป็นเสื้อผ้าสำเร็จรูปทั้ง 2 ชนิด แต่ใช้ส่วนผสมของวัตถุดิบในการผลิตแตกต่างกัน ดังนี้

วัตถุดิบ	สินค้า A	สินค้า B
ผ้าฝ้าย	ร้อยละ 20	ร้อยละ 50
ผ้าใยสังเคราะห์	ร้อยละ 80	ร้อยละ 50

ถ้าในแต่ละวันต้องนำเข้าผ้าฝ้ายไม่เกิน 300 กิโลกรัม และผ้าใยสังเคราะห์ไม่เกิน 420 กิโลกรัม และโรงงานกำหนดราคาขายเสื้อผ้าสำเร็จรูปชนิด A ไว้ตัวละ 300 บาท และเสื้อผ้าสำเร็จรูปชนิด B ไว้ตัวละ 200 บาท จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) จงเขียนสมการจุดประสงค์

2) จงเขียนอสมการข้อจำกัด

3) จงหาจำนวนผลผลิตเฉลี่ยที่ได้ในแต่ละวัน

4) จงหาว่าโรงงานจะต้องขายสินค้าทั้งสองชนิดให้ได้**<u>รวมกัน</u>**เท่าใดจึงจะมีรายได้จากการขายมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ x เป็นจำนวนสินค้าชนิด A และ y เป็นจำนวนสินค้าชนิด B ที่ผลิตได้

1) เนื่องจากโรงงานกำหนดราคาขายเสื้อผ้าชนิด A และชนิด B ไว้ตัวละ 300 บาท และ 200 บาท ตามลำดับ เพราะฉะนั้นสมการจุดประสงค์ คือ $P = 300x + 200y$ **ตอบ**

2) เนื่องจากมีข้อจำกัดในเรื่องของวัตถุดิบที่ต้องนำเข้ามา กล่าวคือ ผ้าฝ้ายสามารถนำเข้ามาได้วันละไม่เกิน 300 กิโลกรัม และผ้าใยสังเคราะห์สามารถนำเข้ามาได้ไม่เกินวันละ 420 กิโลกรัม นอกจากนั้นยังกำหนดอัตราส่วนของวัตถุดิบที่จะใช้ในสินค้าแต่ละชนิด ซึ่งสินค้า A กำหนดอัตราส่วนผสมระหว่างผ้าฝ้ายและผ้าใยสังเคราะห์ไว้ที่ 20: 80 และสินค้า B กำหนดไว้ที่ 50:50 ดังนั้น อสมการข้อจำกัดที่ได้ก็คือ

$$0.2x + 0.5y \leq 300 \quad \text{-----(1)}$$

$$0.8x + 0.5y \leq 420 \quad \text{-----(2)}$$ **ตอบ**

3) ต่อไปเราจะแก้ระบบสมการนี้ด้วยเมตริกซ์และกฎของเครเมอร์ ซึ่งสมการเมตริกซ์ที่สมนัยกับระบบสมการดังกล่าวคือ $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 420 \end{pmatrix}$ -----(3)

เนื่องจาก $\begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{vmatrix} = (0.2)(0.5) - (0.8)(0.5) = 0.1 - 0.4 = -0.3$

โดยใช้กฎของเครเมอร์จะได้ว่า

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 300 & 0.5 \\ 420 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.3} = \frac{(300)(0.5)-(420)(0.5)}{-0.3} = 200 \quad \text{และ}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 300 \\ 0.8 & 420 \end{vmatrix}}{-0.3} = \frac{(0.2)(420)-(0.8)(300)}{-0.3} = 520$$

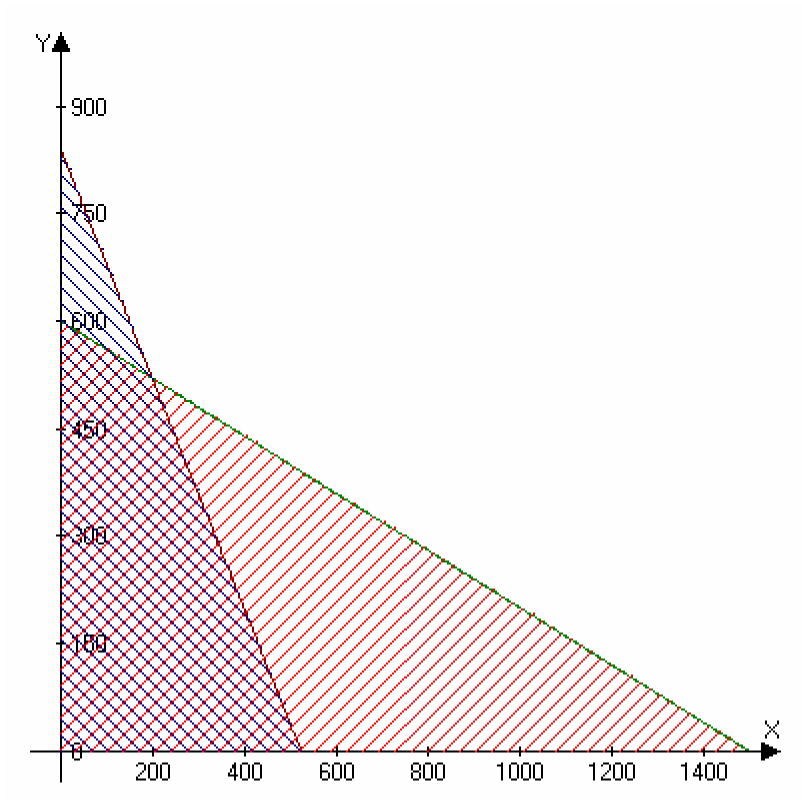
นั่นคือ สินค้า A ผลิตได้ 200 หน่วยต่อวัน และสินค้า B ผลิตได้ 520 หน่วยต่อวัน **ตอบ**

4) พิจารณากราฟของระบบอสมการ

$$0.2x + 0.5y \leq 300 \quad \text{-----(1)}$$

$$0.8x + 0.5y \leq 420 \quad \text{-----(2)}$$

เป็นดังนี้



จากกราฟ จะได้ค่าของจุดมุมที่สอดคล้องกับระบบอสมการ ได้แก่ (0, 0), (525, 0), (200, 520) และ (0, 600) ซึ่งจะได้ค่า P ดังตารางต่อไปนี้

ค่าจุดมุม (x, y)	P = 300x + 200y
(0, 0)	0
(525, 0)	300(525) + 200(0) = 157,500
(200, 520)	300(200) + 200(520) = 164,000
(0, 600)	300(0) + 200(600) = 120,000

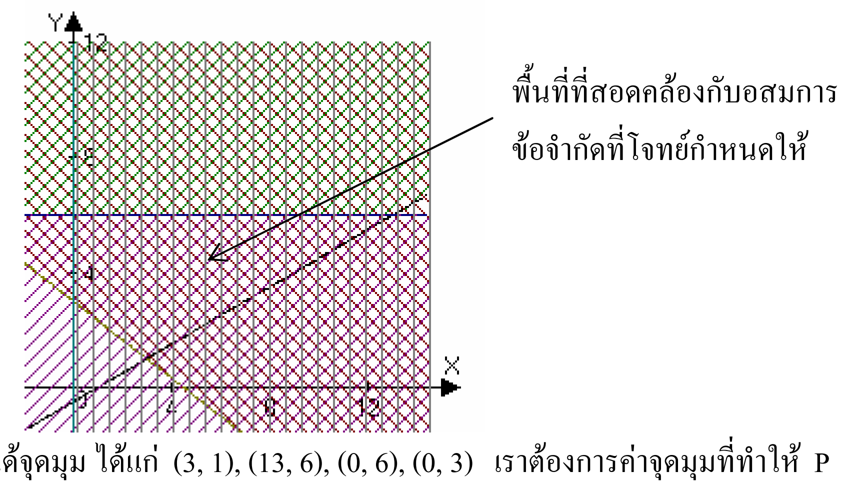
จากกราฟ จะเห็นว่ารายได้จากการขายสินค้าทั้งสองชนิดรวมกันมากที่สุดมีค่าเท่ากับ 164,000 บาท ซึ่งการขายให้ได้รวมกัน 164,000 บาทนี้ จะต้องขายสินค้าทั้งสองชนิดรวมกันทั้งหมด

200 + 520 = 720 ชิ้น **ตอบ**

2. สมมติว่าสมการจุดประสงค์ คือ $P = 3x - ky$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ที่สอดคล้องกับสมการ $k^4 - 2k^3 - 13k^2 + 14k + 24 = 0$ ถ้าอสมการข้อจำกัด คือ $x - 2y \leq 1,\ 2x + 3y \geq 9,\ x \geq 0,\ y \leq 6$ และค่าต่ำสุดของ P เท่ากับ 6 จงหาค่า k

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ข้อนี้มีความพิเศษกว่าโจทย์ที่เคยลองทำกันมาในห้องเรียน แม้แต่ข้อสอบเอ็นทรานซ์ก็เคยออกข้อสอบในทำนองนี้มาแล้ว ผมขอเรียกว่าเป็น “ข้อสอบย้อนรอย” ก็แล้วกันเพราะว่าลักษณะการออกข้อสอบที่แปลกกว่าข้อสอบที่เคยเจอกันมา

จากอสมการข้อจำกัดมาวาดกราฟจะได้ดังนี้



จากกราฟ เราจะได้จุดมุม ได้แก่ (3, 1), (13, 6), (0, 6), (0, 3) เราต้องการค่าจุดมุมที่ทำให้ P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 6 ก็ต้องแก้สมการเงื่อนไขของค่า k คือ $k^4 - 2k^3 - 13k^2 + 14k + 24 = 0$ ซึ่งหาได้เท่ากับ 2 และ 4 (ในการหาค่า k ตามสมการนี้เราจะได้คำตอบเป็นจำนวนจริงลบด้วย แต่ในที่นี้เราจะไม่พิจารณาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงลบ)

จุดมุม	P = 3x + 2y	P = 3x + 4y
(3, 1)	11	13
(13, 6)	51	53
(0, 6)	12	24
(0, 3)	6	12

จากตาราง จะเห็นได้ชัดว่าจุดมุม (0, 3) ทำให้สมการจุดประสงค์ $P = 3x + 2y$ มีค่าต่ำสุดและค่าต่ำสุดก็เท่ากับ 6 แสดงว่าค่า k ที่ทำให้สมการจุดประสงค์มีค่าต่ำสุดก็คือ $k = 2$ **ตอบ**