เฉลยแบบทดสอบเรื่องเซต ตอนที่ 1

1. ถ้า P(A) เป็นสับเซตของ P(B) โดยที่ A และ B เป็นเซตใดๆ และ n(X) เป็นจำนวนสมาชิกของเซต X แล้ว A และ B มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

วิธีทำ สมมติว่า $A \subseteq B$ แสดงว่า $A \cup B = B$

ให้ $x \in A \cup B$ จะได้ว่า $x \in A$ หรือ $x \in B$ นั่นคือ $x \in B$

เนื่องจาก $x \in A$ แสดงว่า $\{x\} \in P(A)$ แต่ $x \in B$ แสดงว่า $\{x\} \in P(B)$

จะได้ว่า $P(A) \subseteq P(B)$

แสดงว่าที่สมมติไว้นั้นถูกต้อง **เฉลยข้อ ก.**

2. กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$A = \{x \in R \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, C = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

จงหาความสัมพันธ์ของแต่ละเซต

วิธีทำ ก่อนอื่นต้องหาสมาชิกในแต่ละเซตก่อนดังนี้

$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$

จะเห็นได้ชัดว่า $A \subseteq B \not\subseteq C$ **เฉลยข้อ ข.**

3. กำหนดให้เซต A, B, C เป็นเซตใดๆ และไม่ใช่เซตอนันต์ ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว จำนวนสมาชิกของเซตใดมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ เนื่องจาก $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ จะได้ว่า $A \cap B = \varnothing, A \cap C = \varnothing, B \cap C = \varnothing$ หรือก็คือทั้งเซต A, B, C เป็นอิสระต่อกัน

จาก
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \quad \text{-----}(*) \end{aligned}$$

เนื่องจากทั้ง 3 เซตเป็นอิสระต่อกัน จากสมการ (*) จึงได้ว่าจำนวนสมาชิกของยูเนียนของทั้ง 3 เซตมีค่าเท่ากับจำนวนสมาชิกของทั้ง 3 เซตบวกกัน และได้ว่ามีจำนวนสมาชิกมากที่สุดด้วย

เฉลยข้อ ก.

4. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$, $B = \{1, 2, 3\}$ จงหาว่าเซต A และ B มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้สามารถวัดความรู้ได้ถึง 2 เรื่อง คือ เรื่องเซตกับเรื่องระบบจำนวนจริง

ต่อไปจะหาสมาชิกของเซต A เนื่องจากเงื่อนไขของ A อยู่ในรูปของสมการพหุนามดีกรีสี่ การหาสมาชิกของ A จึงทำได้โดยการแก้สมการหาค่า x ในที่นี้จะใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

กำหนดให้ $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

เนื่องจาก $P(2) = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$

แสดงว่า $x - 2$ หาร $P(x)$ ลงตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-2)(x+2)(x^2 - 4x + 3) \\ &= (x-2)(x+2)(x-3)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x = -2, 1, 2, 3$

ดังนั้น $A = \{-2, 1, 2, 3\}$

จะเห็นได้ชัดว่า $B \subseteq A$ **เฉลยข้อ ข.**

5. ข้อใดถูกต้องเมื่อ A และ B เป็นเซตใดๆ

<u>วิธีทำ</u> ข้อ ก. ไม่ถูกต้อง เพราะ $A \cap B = \{\}$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ ไม่ใช่ $A \cup B = \{\}$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

ข้อ ข. ถูกต้อง เพราะ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ เป็นกฎของเดอมอร์แกน

ข้อ ค. ไม่ถูกต้อง เพราะ $A - B = \{x | x \in A$ และ $x \notin B\}$ ไม่ใช่

$A - B = \{x | x \in A$ และ $x \in B\}$

ข้อ ง. ไม่ถูกต้อง เพราะ $A \cap B = \{x | x \in A$ และ $x \in B\}$ ไม่ใช่

$A \cap B = \{x | x \notin A$ และ $x \in B\}$ **เฉลยข้อ ข.**

6. นิยามการดำเนินการ $*$ ดังต่อไปนี้

$A * B = (A \cap B') - (B \cap A')$

โดยที่ $\mathscr{U}$ เป็นเซตของเอกภพสัมพัทธ์, A, B, C เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างและไม่มีส่วนใดร่วมกัน

และ $n(X)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต X

จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาข้อ ก.

จากโจทย์ $$\begin{aligned} A * B &= (A \cap B') - (B \cap A') \\ &= (A - B) - (B - A) \\ &= A - B = A \end{aligned}$$

และ $$\begin{aligned} B * A &= (B \cap A') - (A \cap B') \\ &= (B - A) - (A - B) \\ &= B - A = B \end{aligned}$$

แสดงว่าข้อ ก. ไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ข.

จาก $(A * B) * C = [(A \cap B') - (B \cap A')] * C$

$= A * C$

และ $A * (B * C) = A * (B - C)$

$= A * B$

แสดงว่าข้อ ข. ไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ค.

จาก $n(A * B) = n(A - B)$

$= n(A) - n(A \cap B)$

$= n(A)$ (เนื่องจาก $n(A \cap B) = 0$)

และ $n(B * A) = n(B - A)$

$= n(B) - n(A \cap B)$

$= n(B)$ (เนื่องจาก $n(A \cap B) = 0$)

แสดงว่าข้อ ค. ไม่ถูกต้อง **ตอบข้อ ง.**

7. นิยามการดำเนินการ Δ ดังนี้

$A \Delta B = \{x - y \mid x \in A, y \in B$ และ $x > y\}$

เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

<u>วิธีทำ</u> จาก $A \Delta B = \{x - y \mid x \in A, y \in B$ และ $x > y\}$

พิจารณาสมาชิกในเซต $A \Delta B$

เนื่องจาก $x \in A, y \in B$ และ $x > y$ จะเห็นว่า $0 > -1, 1 > -1, 1 > 0, 2 > -1, 2 > 0, 2 > 1, 3 > -1, 3 > 0, 3 > 1, 3 > 2$ จะได้ว่า $A \Delta B = \{1, 2, 3, 4\}$

พิจารณาตัวเลือกข้อ ก.

เราจะหาว่าเซต $\{x \mid x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6 = 0\}$ ประกอบด้วยสมาชิกอะไรบ้างดังนี้

ให้ $P(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6 = 0$ โดยทฤษฎีบทเศษเหลือจะได้ว่า $P(1) = 0$

จะได้ว่า $P(x) = (x - 1)(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6)$

ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลืออีกครั้งจะได้ว่า $P(2) = 0$ ดังนั้น $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

$= (x - 1)(x - 2)[x^2(x - 3) + (x - 3)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$

ดังนั้น $\{x \mid x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6 = 0\} = \{1,2,3, i, -i\}$

แสดงว่า $\{1, 2, 3, 4\} \not\subseteq \{x \mid x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6 = 0\}$ นั่นคือ ข้อ ก. ไม่ถูกต้อง

พิจารณาตัวเลือกข้อ ข. จะได้ว่า

$(A \Delta B) \cup A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $(A \Delta B) \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

เนื่องจาก $n[(A \Delta B) \cup A] > n[(A \Delta B) \cup B]$ แสดงว่า $(A \Delta B) \cup A \not\subseteq (A \Delta B) \cup B$

ข้อ ข. กล่าวไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาตัวเลือกข้อ ค.

จาก $(A \Delta B) - A = \{4\}$ และ $(A \Delta B) - B = \{4\}$ จะเห็นว่า $(A \Delta B) - A = (A \Delta B) - B$

แสดงว่าข้อ ค. กล่าวถูกต้อง **ตอบข้อ ค.**

8. นิยามการดำเนินการ "+" ดังต่อไปนี้

$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B$ และ $x + y \neq 0\}$

กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0, 1\}$ และ $n(X)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต X ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือกข้อ ก.

พิจารณาค่าของ $x + y$ โดยที่ $x \in A, y \in B$ และ $x + y \neq 0$ จากการเรียงสับเปลี่ยน ดังนี้

กรณี $x = -1$ จะได้ $(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2)$ เรียงสับเปลี่ยนได้ 3 วิธี

กรณี $x = 0$ จะได้ $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ เรียงสับเปลี่ยนได้ 3 วิธี

กรณี $x = 1$ จะได้ $(1, 0), (1, 1), (1, 2)$ เรียงสับเปลี่ยนได้ 3 วิธี

จะเห็นว่ามีเพียง $(-1, 1)$ และ $(0, 0)$ เท่านั้นที่ไม่ตรงกับเงื่อนไขว่า $x + y \neq 0$ แสดงว่าเซต $A + B$ จะมีสมาชิกคือ $\{(-1 + 0), (-1 + 2), (0 + 1), (0 + 2), (1 + 0), (1 + 1), (1 + 2)\} = \{-1, 1, 2, 3\}$

นั่นคือ $n(A + B) = 4 \neq n(A) + n(B) = 6$ เพราะฉะนั้นข้อ ก. ไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ข.

พิจารณาในทำนองเดียวกับข้อ ก. จะได้ว่า $n[(A + B) + C] = 5 \neq n(A) + n(B) + n(C) = 8$

เพราะฉะนั้นข้อ ข. ผิด

ต่อไปพิจารณาข้อ ค.

เนื่องจากเซต $A + B$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 4 เพราะฉะนั้นจำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต $A + B$ เท่ากับ $2^4 = 16$ เพราะฉะนั้นข้อ ค. ถูกต้อง **ตอบข้อ ค.**

9. เซตที่เล็กที่สุดของเซต $(A - B') \cap (C - D') \cap (E - F') \cap \ldots \cap (Y - Z')$ โดยที่ $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \ldots \subseteq Y \subseteq Z$ และ A, B, C, …, Z เป็นเซตที่ไม่ว่าง คือเซตในข้อใดต่อไปนี้ (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาเซต $(A - B') \cap (C - D') \cap (E - F') \cap \ldots \cap (Y - Z')$

$= A \cap B \cap C \cap D \cap \ldots \cap X \cap Y \cap Z$

เซตที่ได้นี้หมายความว่าเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว (เพราะโจทย์กำหนดเงื่อนไขว่าทุกเซตเป็นเซตไม่ว่าง) อยู่ในเซตใดเซตหนึ่งที่นำมาอินเทอร์เซกชันกันนั่นเองแต่โจทย์กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม

ว่า $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \ldots \subseteq Y \subseteq Z$ แสดงว่าเซตที่สอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดนี้มีเพียงเซตเดียวที่มีขนาดเล็กที่สุด คือเซต A นั่นเอง **ตอบข้อ ก.**

10. กำหนดให้ P, Q เป็นเซตของสัมประสิทธิ์ที่เป็นจำนวนเต็มบวกของพหุนามดีกรี n (n เป็นจำนวนเต็มบวก) ดังนี้

$P_n(x) = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ และ $Q_n(x) = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ โดยที่ $P \neq Q$ และ $a_n, b_n \neq 0$ นิยามการดำเนินการ "+" คือ $P + Q = \{c_i = a_i + b_i$ ทุก $0 \leq i \leq n \mid a_i \in P, b_i \in Q\}$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวผิด

<u>**วิธีทำ**</u> ข้อ ก. และข้อ ข. เห็นได้ชัดว่าถูกต้อง (คุณสามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายดาย ผมจึงขอละการพิสูจน์) พิจารณาข้อ ค.

จาก $a_1 = a_0 + a_2$ และ $b_1 = b_0 + b_2$ จะได้ว่า $a_1 + b_1 = (a_0 + b_0) + (a_2 + b_2)$

นั่นคือ $c_1 = c_0 + c_2$ ไม่สามารถสรุปได้ว่า $2 \mid c_1$ เพราะฉะนั้นข้อ ค. ไม่ถูกต้อง **ตอบข้อ ค.**