<u>**เฉลยแบบทดสอบเรื่อง ระบบจำนวนจริง**</u>

1. จงหาคำตอบของอสมการ $-2 < x^2 - 3x < 18$ (5 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> ก่อนอื่นให้สังเกตก่อนว่าอสมการนี้จะเป็นจริงเมื่อ $x^2 - 3x > -2$ และ $x^2 - 3x < 18$ นั่นคือเมื่อสามารถแก้อสมการย่อยๆ 2 อสมการนี้ได้แล้วก็เป็นอันว่าเราได้คำตอบของอสมการนี้แน่นอน

จาก
$$\begin{aligned} x^2 - 3x &> -2 \\ x^2 - 3x + 2 &> 0 \\ (x-2)(x-1) &> 0 \end{aligned}$$

ได้ค่าวิกฤติของอสมการ คือ 1 กับ 2 เพราะฉะนั้นคำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

และจาก
$$\begin{aligned} x^2 - 3x &< 18 \\ x^2 - 3x - 18 &< 0 \\ (x-6)(x+3) &< 0 \end{aligned}$$

กรณีนี้ได้ค่าวิกฤติ คือ -3 กับ 6 ดังนั้นคำตอบของอสมการนี้ คือ $(-3, 6)$

การหาคำตอบของอสมการรวมก็คือการเอาผลเฉลยของแต่ละอสมการย่อยๆ มาหาส่วนที่ซ้ำกัน (intersection) ซึ่งในที่นี้ก็คือเซต $[(-\infty, 1) \cup (2, \infty)] \cap (-3, 6) = (-3, 1) \cup (2, 6)$ **ตอบ**

2. กำหนดให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการในระบบจำนวนจริง และ a, b เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ นิยามดังต่อไปนี้ $a * b = 2a + b - 1$ จงตรวจสอบว่าการดำเนินการนี้

1) มีสมบัติการสลับที่ของการบวกหรือไม่ (2 คะแนน)
2) มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกหรือไม่ (2 คะแนน)
3) มีเอกลักษณ์หรือไม่ (2 คะแนน)
4) มีอินเวอร์สหรือไม่ (2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> 1) เนื่องจาก
$$\begin{aligned} b * a &= 2b + a - 1 \\ &\neq a * b \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a * b \neq b * a$ แสดงว่าไม่มีสมบัติการสลับที่ของการบวก **ตอบ**

2) ให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (2a + b - 1) * c \\ &= 2(2a + b - 1) + c - 1 \\ &= 4a + 2b - 2 + c - 1 \\ &= 4a + 2b + c - 3 \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (2b + c - 1) \\ &= 2a + (2b + c - 1) - 1 \end{aligned}$$

$= 2a + 2b + c - 2$

แสดงว่า $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ ดังนั้นไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก **ตอบ**

3) สมมติให้ e เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้นจะต้องแสดงให้ได้ว่า $a * e = e * a = a$

จาก $a * e = 2a + e - 1$

และ $e * a = 2e + a - 1$

จะเห็นได้ว่า $a * e = e * a \neq a$ ดังนั้นไม่มีเอกลักษณ์ **ตอบ**

4) ผลจากข้อ 3) ทำให้ได้ว่าไม่มีอินเวอร์สสำหรับการดำเนินการนี้ **ตอบ**

3. สำหรับจำนวนจริงบวก a, b, c ใดๆ

1) จงแสดงว่า $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$ (3 คะแนน)

2) จงใช้ผลจากข้อ 1) เพื่อหาค่าของ $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> 1) เนื่องจาก $a \geq 0$ จะได้ว่า $(a - 1)^2 \geq 0$

$a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$a^2 + 1 \geq 2a$

นำ a หารตลอดอสมการจะได้ว่า $a + \frac{1}{a} \geq 2$ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$b + \frac{1}{b} \geq 2$ และ $c + \frac{1}{c} \geq 2$ เพราะฉะนั้น

$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 + 2 + 2 = 6$ **ตอบ**

2) จากข้อ 1) เราได้อสมการ $a + \frac{1}{a} \geq 2$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของอสมการจะได้ $(a + \frac{1}{a})^2 \geq 2^2 = 4$

$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \geq 4$ ==> $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 4 - 2 = 2$ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2$ และ $c^2 + \frac{1}{c^2} \geq 2$ นั่นคือ $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 6$ **ตอบ**

4. จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

1) $(a + b + c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$ (3 คะแนน)

2) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$ (2 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> 1) จาก $a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

จะได้ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq a^2 + b^2 + c^2$

เนื่องจาก $a^2, b^2, c^2, 2ab, 2ac, 2bc$ มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นอสมการที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง **ตอบ**

2) เนื่องจาก $|(a+b)+c| \leq |a+b|+|c|$ (จาก Triangle Inequality)

$\leq |a|+|b|+|c|$ (จาก Triangle Inequality อีกครั้ง) **ตอบ**

5. กำหนดให้ a_0, a_1, a_2 เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ถ้า $a_1 = a_0 + a_2$ จงพิจารณาว่า $2 \mid (a_0 + a_1 + a_2)$ หรือไม่ (3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จาก $a_1 = a_0 + a_2$ ----------(1)

บวกเข้าและลบออกสมการ (1) ด้วย $(a_0 + a_2)$ จะได้ว่า

$a_1 + (a_0 + a_2) - (a_0 + a_2) = a_0 + a_2$

$a_1 + (a_0 + a_2) = 2(a_0 + a_2)$ ----------(2)

เนื่องจาก a_0, a_2 เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ (ซึ่งเป็นสมาชิกในเซตของจำนวนเต็มโดยปริยาย)

ก็จะได้ว่า $2 \mid (a_0 + a_1 + a_2)$ **ตอบ**

6. กำหนดให้ m, n, x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

1) สมมติว่า $x \mid y$ และ $y \mid z$ ลงตัว จงพิจารณาว่า $x \mid z$ เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงให้พิสูจน์แต่ถ้าไม่จริงให้ยกตัวอย่างค้าน (2 คะแนน)

2) สมมติว่า $x \mid (m-n)$ และ $y \mid (m-n)$ จงพิจารณาว่า $xy \mid (m-n)$ เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์แต่ถ้าไม่จริงให้ยกตัวอย่างค้าน (2 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> 1) ให้ p, q เป็นจำนวนเต็มใดๆ

เนื่องจาก $x \mid y$ และ $y \mid z$ จะได้ว่า $x = py$ และ $y = qz$ สำหรับบางจำนวนเต็ม p, q

จะได้ว่า $x = p(qz) = (pq)z$ และ pq เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $x \mid z$ **ตอบ**

2) ให้ p, q เป็นจำนวนเต็มใดๆ

เนื่องจาก $x \mid (m-n)$ และ $y \mid (m-n)$ จะได้ว่า $m-n = px$ และ $m-n = qy$ สำหรับบางจำนวนเต็ม p, q ดังนั้น $(m-n)(m-n) = (px)(qy) = (pq)(xy)$ และ pq เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $xy \mid (m-n)^2$ และจะเห็นได้ชัดว่า $xy \mid (m-n)$ ด้วย **ตอบ**