เฉลยแบบทดสอบเรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น

ส่วนที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. จงหา $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{\sqrt{-x}}{x^2 - 1} \right)$ สำหรับทุก $x < 0$ (5 คะแนน)

วิธีทำ ก่อนอื่นพิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน f ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่าเท่ากับ $\{x \mid x < 0\}$

จาก $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\dfrac{\sqrt{-x}}{x^2 - 1} \right) = \dfrac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้ และเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\dfrac{\sqrt{-x}}{x^2 - 1} \right) = \dfrac{1}{0}$

แสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ **ตอบ**

2. จงหา $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{|x - 1|} \right)$ (5 คะแนน)

วิธีทำ f(x) สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่งดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} & \text{เมื่อ } x > 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{1-x} & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

พิจารณา $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ จะเห็นว่าอยู่ในรูป $\dfrac{1}{0}$ ซึ่งไม่นิยาม

พิจารณา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ จะเห็นว่าอยู่ในรูป $\dfrac{1}{0}$ ซึ่งไม่นิยามอีกเช่นกัน

ดังนั้นจึงไม่มีลิมิต **ตอบ**

3. กำหนดให้ $f(x-2) = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}$ จงพิจารณาว่า f(x) มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่ (10 คะแนน)

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x-2) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$

ให้ $x - 2 = t$ จะได้ว่า

$$f(t) = \frac{t+3}{|t+3|}$$

จะได้ว่า $f(x) = \dfrac{x+3}{|x+3|}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \geq -3 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < -3 \end{cases}$$

จะได้ว่า

1. $f(0) = 1$

2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

3. $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ **ตอบ**

4. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}}$ ต่อเนื่องบนช่วง (1, 5) หรือไม่ (10 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก f(2) ไม่สามารถหาค่าได้ นั่นคือ f(x) ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

แล้ว f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $(1, 2) \cup (2, 5)$ หรือไม่?

เนื่องจากทุก $x \in (1, 2) \cup (2, 5)$ สามารถหา f(x) ได้

และ $\lim_{x \to a} f(x)$ สำหรับทุก $a \in (1, 2) \cup (2, 5)$

และทุก $a, x \in (1, 2) \cup (2, 5)$, $f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

นั่นคือ f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $(1, 2) \cup (2, 5)$ **ตอบ**

<u>ส่วนที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์อย่างง่าย</u>

1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = 2$ (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า f(x) ต่อเนื่องสำหรับทุกค่า $x > 1$ ดังนั้น f(x) มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 2$ แน่ๆ

จาก $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ จัดรูปของ f(x) ใหม่จะได้ว่า $f(x) = (x - 1)^{\frac{-1}{2}}$

ดังนั้น

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x - 1)^{\frac{-1}{2}}$$

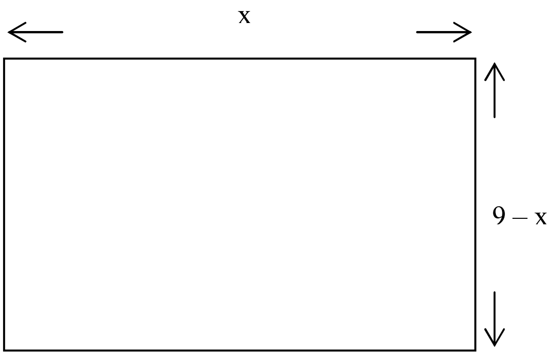
$$= -\frac{1}{2}(x - 1)^{\frac{-1}{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 1)^{\frac{-3}{2}}$$

<u>ตอบ</u>

2. สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 18 เซนติเมตร จงหาขนาดของพื้นที่ที่มากที่สุดเมื่อด้านยาวมีความยาวมากที่สุด (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u>



สมมติให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว x เซนติเมตร นั่นคือมีด้านกว้างเท่ากับ $9 – x$ เซนติเมตร

จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้เท่ากับ $(A) = x(9 – x) = 9x – x^2$

ต่อไปหา $A'(x) = 9 – 2x$

ให้ $A'(x) = 0$ ดังนั้น $9 – 2x = 0$ แก้สมการได้ $x = \frac{9}{2}$

เนื่องจาก $A''(x) = –2$ ทุก x จะพบว่า $–2 < 0$ จึงมั่นใจได้ว่า $x = \frac{9}{2}$

เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์แน่นอน นั่นคือ พื้นที่ที่มากที่สุดเมื่อมีความยาวที่มากที่สุดคือ

$9\left(\frac{9}{2}\right) – \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$ ตารางเซนติเมตร **<u>ตอบ</u>**

3. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 – 3x^2 + 6$ ที่จุด (2, 2) (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จากความจริงที่ว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดใดๆ หาได้จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของเส้นโค้งนั้น นั่นคือ $f'(x) = 3x^2 – 6x$ จากนั้นแทนค่า $x = 2$ ลงในอนุพันธ์ที่หาได้

จะได้ว่าความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 2)$ เท่ากับ $3(2)^2 - 6(2) = 0$ เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(2, 2)$ คือเส้นตรง $y = 2$ **ตอบ**

4. กำหนดให้ $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ โดยที่ $u(x) = (x^3 + k)^2,\ v(x) = x^2 + k,\ k \in \mathbb{R}^+$ ถ้า $f'(-1) = 72$ จงหาค่าของ $f(k)$ (5 คะแนน)

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $f'(-1) = 72$ และ $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้คือ

$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ -----(1)

และเนื่องจาก $u(x) = (x^3 + k)^2,\ v(x) = x^2 + k,\ k \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $u'(x) = 2(x^3 + k)(3x^2) = 6x^2(x^3 + k)$ และ $v'(x) = x^2 + k = 2x$

แทนค่า $u'(x)$ และ $v'(x)$ ลงในสมการ (1) จะได้ว่า

$f'(x) = [(x^3 + k)^2 \cdot 2x] + [6x^2(x^3 + k) \cdot (x^2 + k)]$ -----(2)

นั่นคือ $f'(-1) = \{[(-1)^3 + k]^2 \cdot 2(-1)\} + \{6(-1)^2[(-1)^3 + k] \cdot [(-1)^2 + k]\}$

$= (-2)(k - 1)^2 + 6(k - 1)(k + 1) = 72$

แก้สมการหาค่า $k = 4$ และ $k = -5$ แต่โจทย์ต้องการค่า k ที่เป็นบวก ดังนั้นค่าที่ใช้ได้มีเพียงค่าเดียวคือ $k = 4$ ดังนั้น $f(4) = u(4) \cdot v(4)$

$= [(4)^3 + 4]^2 \cdot [(4)^2 + 4]$

$= 68^2 \cdot 20$

$= 92{,}480$ **ตอบ**

5. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (สูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์) ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ (10 คะแนน)

วิธีทำ จากโจทย์คือ $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

ให้ $f'(x) = 0$

จะได้ว่า $(3x + 1)(x + 1) = 0$ นั่นคือ $x = -\frac{1}{3}$ และ -1

$f''(x) = 6x + 4$

จะได้ว่า $f''(-\frac{1}{3}) = 6(-\frac{1}{3}) + 4 = 2 > 0$ นั่นคือ $x = -\frac{1}{3}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จะได้ว่า $f''(-1) = 6(-1) + 4 = -2 < 0$ นั่นคือ $x = -1$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

นั่นคือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f(x) ได้แก่ $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 + 2 - 1 + 2 = 2$

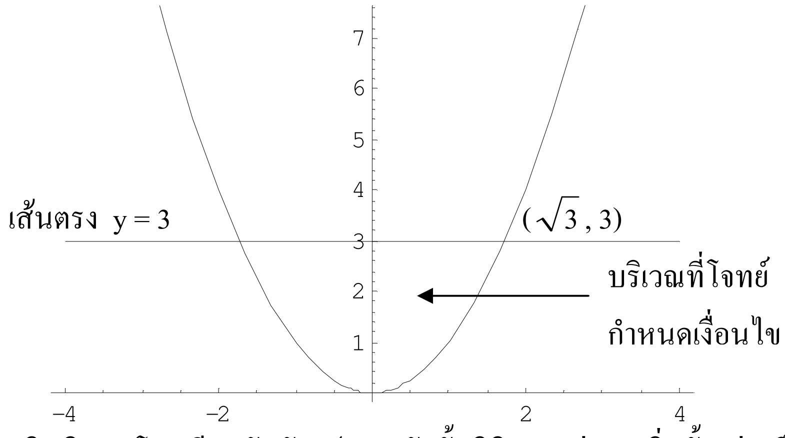
และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f(x) ได้แก่ $f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 + 2(-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3}) + 2$

$= \frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{52}{27}$ **ตอบ**

ส่วนที่ 3 การอินทิเกรตและการประยุกต์อย่างง่าย

1. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$, เส้นตรง $y = 0$ และ $y = 3$ (10 คะแนน)

วิธีทำ เนื่องจาก $y = x^2$ วาดกราฟคร่าวๆ ได้ดังนี้



ในที่นี้จะอินทิเกรตโดยเทียบกับตัวแปร x ดังนั้นลิมิตของค่า x เริ่มตั้งแต่ 0 ถึง $\sqrt{3}$

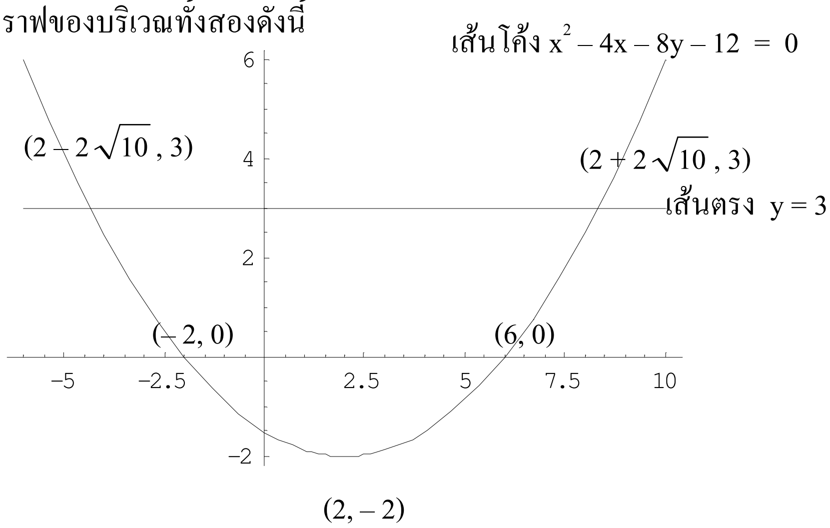
นั่นคือ พื้นที่ที่กำหนด $= \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{\sqrt{3}}$$

$= \sqrt{3}$ ตารางหน่วย **ตอบ**

2. จงหาผลต่างของพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$ และเส้นตรง $y = 3$ กับบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งดังกล่าวและเส้นตรง $y = 0$ (10 คะแนน)

วิธีทำ ลองวาดกราฟของบริเวณทั้งสองดังนี้



จะสังเกตเห็นได้โดยง่ายว่าบริเวณที่โจทย์ต้องการหาคำตอบคือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นตรง $y = 0$

นั่นคือ พื้นที่ของบริเวณดังกล่าว $= \frac{1}{8}\left(\int_{2-2\sqrt{10}}^{2+2\sqrt{10}} (x^2 - 4x - 12)dx\right)$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 12x\right)\Bigg|_{x=2-2\sqrt{10}}^{2+2\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{8}[\left(\frac{(2+2\sqrt{10})^3}{3}\right) - 2(2+2\sqrt{10})^2 - 12(2+2\sqrt{10})]$$

$$- \frac{1}{8}[\left(\frac{(2-2\sqrt{10})^3}{3}\right) - 2(2-2\sqrt{10})^2 - 12(2-2\sqrt{10})]$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{248+104\sqrt{10}}{3} - 112 - 40\sqrt{10}] - \frac{1}{8}[\frac{248-104\sqrt{10}}{3} - 112 - 40\sqrt{10}]$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{248+104\sqrt{10}}{3} - \frac{248-104\sqrt{10}}{3})$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{208\sqrt{10}}{3})$$

$$= \frac{208\sqrt{10}}{24}$$

$= \frac{26\sqrt{10}}{3}$ ตารางหน่วย **ตอบ**

3. กำหนดให้ $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$ ถ้า $f(1) = 0$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 0) \cup (1, 5]$ หรือไม่ (5 คะแนน)

2) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ ถ้ามีจงหา (5 คะแนน)

3) จงวาดกราฟคร่าวๆ ของ $y = f(x)$ (10 คะแนน)

วิธีทำ 1) ต่อเนื่องทุกค่า x บนช่วงที่กำหนดให้ **ตอบ**

2) จาก $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$

ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $\frac{x^2-4}{x^2} = 0$ ดังนั้น $x = 2, -2$

เนื่องจาก $f''(x) = \frac{8}{x^3}$ จะได้ $f''(2) = 1 > 0$ และ $f''(-2) = -1 < 0$

จาก $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$ จะได้ว่า

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)dx$$

$$= \int\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$= \int dx - 4\int x^{-2}dx$$

$$= x + \frac{4}{x} + c$$

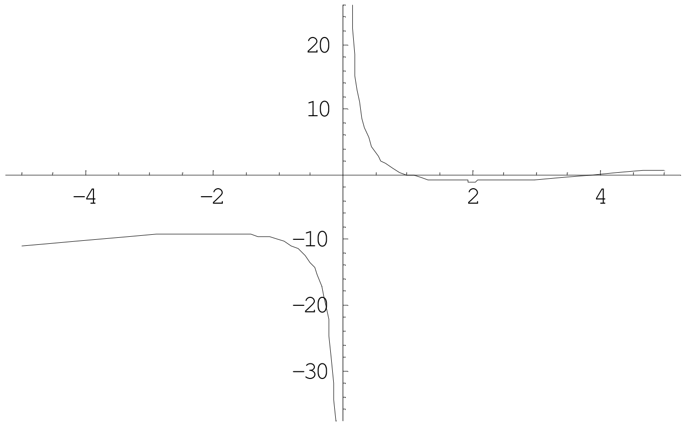
แต่ $f(1) = 0$ จะได้ $0 = 1+4+c$ นั่นคือ $c = -5$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x + \frac{4}{x} - 5$

แทนค่า $f(2) = 2+2-5 = -1$ และ $f(-2) = -2-2-5 = -9$

นั่นคือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -1 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -9 **<u>ตอบ</u>**

3) กราฟคร่าวๆ ของ $y = x + \frac{4}{x} - 5$ โดยจุดตัดแกน X คือ (1, 0) และ (4, 0) แต่ไม่มีจุดตัดแกน Y (พิจารณาจากสมการจะเห็นว่าเมื่อให้ $x = 0$ จะหาค่า y ไม่ได้)



<u>ตอบ</u>

4. กำหนดให้ $g(x) = [u(x)]^4 + 1$, $u'(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, c เป็นค่าคงที่ใดๆ ถ้า $u(0) = 1$, $u(1) = 3$

1) จงหาค่าของ $g'(1)$ (5 คะแนน)

2) u(x) มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์หรือสูงสุดสัมพัทธ์หรือไม่ ถ้ามีจงหา (5 คะแนน)

3) จงวาดกราฟคร่าวๆ ของ $y = u(x)$ (10 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> 1) ก่อนจะหา $g'(x)$ จะต้องหา u(x) เสียก่อนดังนี้

จาก $u'(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} = cx^{-1/2}$ จะได้ว่า $u(x) = c\int x^{-1/2}dx = c(2\sqrt{x} + k)$;

k เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต

แทนค่า $u(0) = 1$, $u(1) = 3$ จะได้ว่า $u(0) = ck = 1$

และ $u(1) = c(2+k) = 2c + ck = 2c + 1 = 3$ จะได้ $c = 1, k = 1$

เพราะฉะนั้น $u(x) = 2\sqrt{x} + 1$

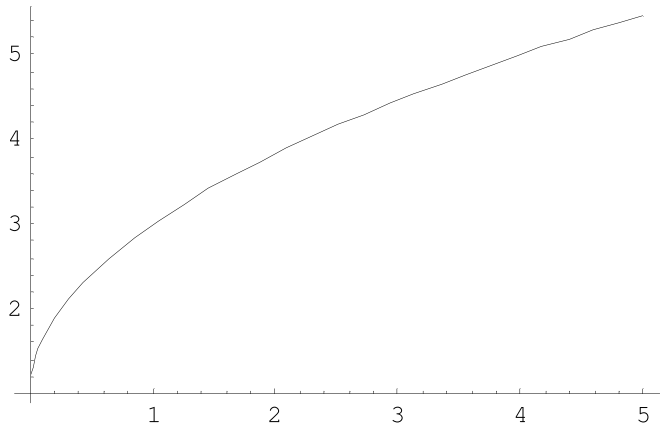
จาก $g(x) = [u(x)]^4 + 1$ จะได้ $g'(x) = 4[u(x)]^3 \cdot u'(x)$

นั่นคือ $g'(1) = 4[u(1)]^3 \cdot u'(1) = 4(2(1)+1)^3 \cdot (1) = 4(27) = 108$ **<u>ตอบ</u>**

2) จาก $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

ให้ $u'(x) = 0$ จะเห็นว่าไม่มีค่า x ที่ทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้นไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ต้องการ **<u>ตอบ</u>**

3) จาก $u(x) = 2\sqrt{x} + 1$ จะได้จุดตัดแกน Y คือ (0, 1) แต่ไม่มีจุดตัดแกน X ได้กราฟดังรูป



จะเห็นว่าเป็นไปตามที่หาในข้อ 2 คือหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ไม่ได้ และไม่มีแนวโน้มที่ลู่เข้าหาค่า x ค่าใดค่าหนึ่ง **<u>ตอบ</u>**

☙ ☙ ☙ ☙ ☙ ☙