<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องลำดับและอนุกรม</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. จงหาผลบวกของอนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นให้สังเกตก่อนว่าพจน์ทั่วไปของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$ คือ $\frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n \geq 1$

เราจะตรวจสอบก่อนว่าอนุกรมนี้หาผลบวกได้หรือไม $\;$ โดยพิจารณาว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$ หรือไม่ ดังนี้

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \neq 0$

แสดงว่าอนุกรมนี้หาผลบวกไม่ได้ **เฉลยข้อ ง.**

2. อนุกรมชุดหนึ่งมีผลบวกของ 18 พจน์แรกเท่ากับ 549 ถ้าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรกเท่ากับ 5 แล้วพจน์ที่ 250 มีค่าเท่ากับเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> โจทย์กำหนดผลบวกของอนุกรมมาให้

ดังนั้นจากสูตร $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

แทนค่า $S_n = 549,\ a_1 = 5,\ n = 18$ จะได้

$$549 = \frac{18}{2}[2(5) + (18-1)d]$$

$$61 = 10 + 17d$$

$$d = 3$$

ต่อไปจะหาพจน์ที่ 250 โดยใช้ข้อมูลทั้งหมดที่มี

จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่า $a_{250} = 5 + (250-1)(3)$

$= 5 + 747$

$= 752$ **เฉลยข้อ ค.**

3. พิจารณาลำดับ $a_n = -1, 0, 3, 8, 15, \ldots$ ทุก $n \geq 0$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้กล่าวผิด (พิจารณาตัวเลือกในโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $n = 0;\ a_0 = 0 - 1 = -1$

$n = 1;\ a_1 = 1 - 1 = 0$

$n = 2;\ a_2 = 4 - 1 = 3$

$n = 3;\ a_3 = 9 - 1 = 8$

$n = 4;\ a_4 = 16 - 1 = 15$

$\dots \qquad \dots$

เพราะฉะนั้น พจน์ทั่วไปของ $a_n = n^2 - 1$ แสดงว่าข้อ ก. ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาตัวเลือกข้อ ข.

เนื่องจาก $a_{100} = 100^2 - 1 = 10{,}000 - 1 = 9{,}999$ และ $a_{99} = 99^2 - 1 = 9{,}800$

แต่ $a_{99} + 2 = 9{,}800 + 2 = 9{,}802 < 9{,}999$ แสดงว่าข้อ ข. กล่าวผิด

นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถแสดงได้ว่าข้อ ค. และข้อ ง. เป็นจริง (ในที่นี้ขอละไว้ให้นักเรียนลองพิสูจน์เอง) **เฉลยข้อ ข.**

4. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่สมบัติของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{10}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{2n}}} + \dots$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{2n}}}\right) = 0$ แสดงว่าลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

แสดงว่าข้อ ก. และข้อ ข. ถูกต้อง

แต่เมื่อพิจารณาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้แล้วปรากฏว่าเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์แสดงว่าข้อ ค. ถูกต้อง เพราะฉะนั้นข้อที่ผิดคือ ข้อ ง. ซึ่งที่ผ่านมาแสดงว่าทั้งข้อ ก., ข., ค. เป็นสมบัติของอนุกรมนี้ทั้งสิ้น **เฉลยข้อ ง.**

5. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$, $b_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกในโจทย์)

<u>**วิธีทำ**</u> พิจารณาข้อ ก.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right) + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

แสดงว่าข้อ ก. กล่าวไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ข.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

แสดงว่าข้อ ข. กล่าวถูกต้อง

พิจารณาข้อ ค.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right] = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$$

$= \frac{1/2}{0}$ นั่นคือไม่มีลิมิตนั่นเอง

เพราะฉะนั้นข้อ ค. กล่าวไม่ถูกต้อง

จากที่พิจารณามาทั้งหมดจะได้ว่าข้อ ข. กล่าวถูกต้องเท่านั้น **เฉลยข้อ ข.**

6. ถ้าลำดับมีรูปทั่วไปคือ $a_n = bn^3 + c$ โดยที่ b, c, n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ถ้าทราบว่า $\sum_{n=1}^{10} a_n = 6{,}060$ และ $a_1 = 3$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

__วิธีทำ__ ก่อนที่เราจะพิจารณาตัวเลือกทั้ง 4 ข้อ เราจะต้องหาค่าของ b, c ดังนี้

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} a_n = 6{,}060$ และ $a_1 = 3$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(bn^3 + c\right) = b\sum_{n=1}^{10} n^3 + \sum_{n=1}^{10} c$$

$$= b\left(\sum_{n=1}^{10} n\right)^2 + 10c = b\left[\frac{10}{2}(10+1)\right]^2 + 10c$$

$$6{,}060 = 3025\,b + 10c \quad \text{----------(1)}$$

และ $3 = b + c$ ----------(2)

(2) x 10; $30 = 10b + 10c$ ----------(3)

(1) – (3); $6,030 = 3015b$

$b = 2$

แทนค่า $b = 2$ ในสมการ (2) จะได้ $c = 1$

เพราะฉะนั้น $a_n = 2n^3 + 1$

ต่อไปพิจารณาตัวเลือกข้อ ก.

จาก $b_n = \frac{a_n}{n^4+1} = \frac{2n^3+1}{n^4+1}$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+1}{n^4+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3(2+\frac{1}{n^3})}{n^3(n+\frac{1}{n^3})}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n^3}}{n+\frac{1}{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$$ ดังนั้นข้อ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อ ข.

ข้อนี้สามารถพิจารณาได้หลายรูปแบบ ในที่นี้จะแสดงให้ดู 2 รูปแบบดังนี้

แบบที่ 1: จาก $a_n = 2n^3 + 1$ จะเห็นว่าทางขวาของสมการเป็นบวกเสมอ (n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ เพราะฉะนั้น $2n^3$ ย่อมเป็นจำนวนเต็มบวก และ 1 เป็นจำนวนเต็มบวกอยู่แล้ว เพราะฉะนั้น a_n ทางซ้ายของสมการย่อมเป็นบวกด้วย นั่นหมายความว่า $a_n \geq 1$ เสมอ

แบบที่ 2: จาก $a_n = 2n^3 + 1$ จัดรูปใหม่ดังนี้

$$a_n - 1 = 2n^3$$

$$n^3 = \frac{a_n - 1}{2}$$

จะได้ว่า $n = \sqrt[3]{\frac{a_n-1}{2}}$ ขอให้นักเรียนสังเกตว่าทางซ้ายของสมการเป็นบวกอยู่แล้วโดยเงื่อนไขที่กำหนดให้ แสดงว่านิพจน์ $\sqrt[3]{\frac{a_n-1}{2}}$ เป็นบวก นั่นคือ $\sqrt[3]{\frac{a_n-1}{2}} \geq 0$ จะได้ว่า $a_n \geq 1$

เพราะฉะนั้นข้อ ข. กล่าวถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ค.

จาก $$\sum_{n=6}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} a_n - \sum_{n=1}^{5} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{10}\left(2n^3+1\right) - \sum_{n=1}^{5}\left(2n^3+1\right)$$

$$= \left(2\sum_{n=1}^{10} n^3 + \sum_{n=1}^{10} 1\right) - \left(2\sum_{n=1}^{5} n^3 + \sum_{n=1}^{5} 1\right)$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{10} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{10} n\right)^2 = \left[\frac{10}{2}(10+1)\right]^2 = 3,025$

และ $\sum_{n=1}^{5} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{5} n\right)^2 = \left[\frac{5}{2}(5+1)\right]^2 = 225$

ดังนั้น $\sum_{n=6}^{10} a_n = [2(3,025) + (10)(1)] - [2(225) + (5)(1)]$

$= 6,060 - 455 = 5,605$ แสดงว่าข้อ ค. ถูกต้อง **เฉลยข้อ ง.**

7. กำหนดให้ a_n, b_n, c_n เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกใดๆ โดยที่ $a_n = |b_n - c_n|$ และ k เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาข้อ ก.

$$\lim_{n\to\infty} |kb_n - kc_n| = \lim_{n\to\infty} |k(b_n - c_n)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |k||b_n - c_n| \quad \text{(สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง)}$$

ถ้า $k > 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} |kb_n - kc_n| = \lim_{n\to\infty} k|b_n - c_n|$

แต่ถ้า $k < 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} |kb_n - kc_n| = \lim_{n\to\infty} (-k)|b_n - c_n|$ เพราะฉะนั้นข้อ ก. กล่าวผิด

ต่อไปพิจารณาข้อ ข.

จาก $a_n = |b_n - c_n|$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(|b_n - c_n|\right)$

โดยสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงจะได้ว่า $|b_n - c_n| \le |b_n| + |c_n|$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \left(|b_n| + |c_n|\right)$

$$\le \lim_{n\to\infty} |b_n| + \lim_{n\to\infty} |c_n|$$

แต่ว่า b_n, c_n เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกใดๆ แสดงว่า $b_n, c_n > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n$ นั่นคือข้อ ข. กล่าวถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ค.

จากโจทย์ $a_n = |b_n - c_n|$ โดยนิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงจะได้ว่า

$$a_n = \begin{cases} b_n - c_n & \text{เมื่อ } b_n - c_n \ge 0 \\ c_n - b_n & \text{เมื่อ } b_n - c_n < 0 \end{cases}$$

จะเห็นได้ชัดว่าเมื่อ $b_n - c_n < 0$ หรือก็คือ $b_n < c_n$ จะทำให้ได้ว่า $a_n = c_n - b_n$

ดังนั้น ข้อ ค. กล่าวถูกต้อง **เฉลยข้อ ง.**

8. จงหาค่า k ซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ทำให้ $\sum_{n=1}^{10}\left(kn^3+3kn^2+n+3\right) = 4,265$

วิธีทำ จาก $\sum_{n=1}^{10}\left(kn^3+3kn^2+n+3\right) = 4,265$

$$k\sum_{n=1}^{10} n^3 + 3k\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} 3 = 4,265$$

$$k\left(\sum_{n=1}^{10} n\right)^2 + 3k\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n + 30 = 4,265$$

$$k\left(\sum_{n=1}^{10} n\right)^2 + 3k\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n = 4,235$$

$$k\left(\frac{10}{2}(10+1)\right)^2 + 3k\left(\frac{10}{6}(11)(21)\right) + \left(\frac{10}{2}(10+1)\right) = 4,235$$

$$3,025k + 1155k + 55 = 4,235$$

$$4,180k = 4,180$$

$$k = 1$$

เฉลยข้อ ค.

ตอนที่ 2

1. กำหนดให้ $a_{n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ ทุก $n > 2$ จงเขียนเซตของลำดับนี้พร้อมทั้งหาค่าของ $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้ $n + 2 = m$ จะได้

$$a_m = \frac{1}{2\sqrt{m-3}}$$

นั่นคือ $$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n-3}}$$

ให้ S เป็นเซตของลำดับ a_n ดังนั้น $S = \{a_n \mid n > 3\}$

ต่อไปจะหาค่าของ $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$

เนื่องจาก $a_4 = \frac{1}{2\sqrt{1}}, a_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, a_6 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, a_7 = \frac{1}{2\sqrt{4}}, \ldots$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{\infty} a_n &= a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{4}} + \ldots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ เป็น P – series ที่มีค่า $p < 1$ ดังนั้นเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ **ตอบ**

2. ถ้าพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ติดกันของลำดับเรขาคณิตเท่ากับ $\frac{1}{256}$ และ $\frac{1}{1024}$ ตามลำดับ จงหาผลบวกของ 100 พจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ หาอัตราส่วนร่วมได้เท่ากับ $\frac{1}{4}$

จากสูตร $$a_n = a_1 r^{n-1}$$

แทนค่า $n = 4,\ a_4 = \frac{1}{256},\ r = \frac{1}{4}$ ลงในสูตรจะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{256} &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{64}\right) \\ a_1 &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ต่อไปหาผลบวก 100 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตจากสูตร

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{100} = \frac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{4})^{100})}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^{100}]$$ **ตอบ**

3. จงแสดงว่าผลบวกของอนุกรมเลขคณิต n พจน์ มีค่าเท่ากับ $\frac{n}{2}(n+1)$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจากผลบวกของอนุกรมเลขคณิตอยู่ในรูป

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ ----------❶

จะแสดงว่าสมการ ❶ เป็นจริงโดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> ให้ $n = 1$ จะได้

$$1 = \frac{1}{2}(1+1)$$
$$= 1$$

จะได้ว่า $1 = 1$ ซึ่งเป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติว่าสมการ ❶ เป็นจริง

ให้ $n = n+1$ จะได้ว่า

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1)$

$$= \frac{n}{2}(n+1) + (n+1)$$
$$= (n+1)(\frac{n}{2} + 1)$$
$$= \frac{n+1}{2}(n+2)$$
$$= \frac{n+1}{2}[(n+1)+1$$ ----------❷

จะเห็นว่าค่า n จากสมการ ❶ เปลี่ยนไปเป็น $n+1$ ในสมการ ❷ แสดงว่าสมการ ❶ เป็นจริง เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าผลบวกของอนุกรมเลขคณิต n พจน์ มีค่าเท่ากับ $\frac{n}{2}(n+1)$ **ตอบ**

4. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์แรก, พจน์กลาง, และพจน์ท้ายเป็นเลขคู่ ถ้าพจน์ข้างเคียงของพจน์กลางเท่ากับ -14 และ -26 แล้ว จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

<u>**วิธีทำ**</u> โจทย์กำหนดพจน์ข้างเคียงพจน์กลาง คือ $a_{(n/2)-1}$ กับ $a_{(n/2)+1}$ แทนค่าในสูตรเรื่องลำดับเลขคณิต

จะได้ว่า $a_{(n/2)-1} = a_1 + [[\frac{n}{2} - 1] - 1]d$

$$= a_1 + [\frac{n}{2} - 2]d$$

$$-14 = a_1 + [\frac{n}{2} - 2]d$$

$$= a_1 + \frac{n}{2}d - 2d \quad \text{----------} ❶$$

และ $$a_{(n/2)+1} = a_1 + [[\frac{n}{2} + 1] - 1]d$$

$$= a_1 + \frac{n}{2}d$$

$$-26 = a_1 + \frac{n}{2}d \quad \text{----------} ❷$$

แทนค่าจากสมการ ❷ ลงในสมการ ❶ จะได้ว่า

$$-14 = -26 - 2d$$

$$2d = -12$$

$$d = -6$$

แทนค่า $d = -6$ ลงในสมการ ❶ จะได้

$$-14 = a_1 - 3n + 12$$

$$a_1 = 3n - 26 \quad \text{----------} ❸$$

เพราะฉะนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ

$$a_n = (3n - 26) + (n - 1)(-6)$$

$$= 3n - 26 - 6n + 6$$

$$= -3n - 20$$

ตอบ