<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. ข้อใดเป็นฟังก์ชันลด (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> จากตัวเลือกทั้งหมดจะเห็นว่าเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลทั้งสิ้น ต่อไปจะมาพิจารณานิยามของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล

"ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล" คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงและเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงบวก มีรูปทั่วไปคือ $y = a^x$ เมื่อ a เป็นฐาน ซึ่งจะแบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ

(1) $a > 0$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(2) $0 < a < 1$ จะเป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น จากโจทย์จะได้ว่าข้อ ก. เป็นฟังก์ชันลด **เฉลยข้อ ก.**

2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 6^x + 2^x - 3^{x+1} - 3$ ถ้า A เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ ข้อใดถูกต้อง (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นให้หาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ เสียก่อนดังนี้

ให้ $6^x + 2^x - 3^{x+1} - 3 = 0$

$2^x \cdot 3^x + 2^x - 3 \cdot 3^x - 3 = 0$

$(2^x - 3)(3^x + 1) = 0$

เพราะฉะนั้นคำตอบของสมการที่เป็นไปได้คือ $A = x = \log_2 3$

➲ พิจารณาตัวเลือก ก.

จากสมการ $A^2y^2 - 3Ay + 2 = 0$

จะได้ $(Ay - 2)(Ay - 1) = 0$

นั่นคือ $y(\log_2 3) - 2 = 0$ หรือ $y(\log_2 3) - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $y = \dfrac{2}{\log_2 3}$ หรือ $y = \dfrac{1}{\log_2 3}$

ดังนั้น ผลบวกทั้งหมดของคำตอบของสมการคือ $\dfrac{2}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_2 3} = \dfrac{3}{\log_2 3}$ ข้อ ก. ผิด

➲ พิจารณาตัวเลือก ข.

จากสมการ $z^2 8^A - z \cdot 4^{A+1} + 3z \cdot 2^A - 12 = 0$

จัดรูปสมการโจทย์ใหม่โดยการแทนค่า $A = \log_2 3$ ลงในสมการก็จะได้ว่า

$z^2(8^{\log_2 3}) - 4z(4^{\log_2 3}) + 3z(2^{\log_2 3}) - 12 = 0$

$z^2(2^{\log_2 27}) - 4z(2^{\log_2 9}) + 3z(2^{\log_2 3}) - 12 = 0$

$z^2(27) - 4z(9) + 3z(3) - 12 = 0$

$27z^2 - 27z - 12 = 0$ นำ 3 หารตลอดจะได้ $9z^2 - 9z - 4 = 0$ จากนั้นแยกตัวประกอบ

จะได้ $(3z+1)(3z-4) = 0$ นั่นคือ $z = -\frac{1}{3}$ และ $z = \frac{4}{3}$

ดังนั้น ผลบวกของคำตอบของสมการนี้เท่ากับ $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$ ดังนั้น ข้อ ข. ถูกต้อง

➲ พิจารณาตัวเลือกข้อ ค.

เนื่องจาก $g(x) = \frac{\log_2 3}{x^2} = (\log_2 3)x^{-2}$

สมมติให้ $x_1 < x_2$ โดยที่ $x_1, x_2 \in (0, 1)$ จะได้ว่า

$$x_1^{-2} > x_2^{-2}$$

$$(\log_2 3)x_1^{-2} > (\log_2 3)x_1^{-2}$$

นั่นคือ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 1)$ ดังนั้น ข้อ ค. ผิด

➲ พิจารณาตัวเลือกข้อ ง.

เนื่องจาก $k(x) = (\log_2 3)x^2 + 4x + 4$ จะได้ $k'(x) = 2(\log_2 3)x + 4 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{2}{\log_2 3}$ แทนค่า x ลงใน $k''(x)$ ได้ดังนี้

$k''(-\frac{2}{\log_2 3}) = 2(\log_2 3) > 0$ แสดงว่าที่ $x = -\frac{2}{\log_2 3}$ ทำให้ $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

และได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $k(x) = (\log_2 3)(-\frac{2}{\log_2 3})^2 + 4(-\frac{2}{\log_2 3}) + 4$

$$= \frac{4}{\log_2 3} - \frac{8}{\log_2 3} + 4$$

$= -\frac{4}{\log_2 3} + 4$ ข้อ ง. ผิด **เฉลยข้อ ข.**

3. ข้อใดเป็นฟังก์ชันลด (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือก ก.

สมมติให้ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$$3^{x_1} < 3^{x_2}$$

$$\log(3^{x_1}) < \log(3^{x_2})$$

นั่นคือ $y = \log(3^x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ข้อ ก. ผิด

พิจารณาตัวเลือก ข.

สมมติให้ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$$3x_1 < 3x_2$$

$$\log(3x_1) < \log(3x_2)$$

$$2^{\log(3x_1)} < 2^{\log(3x_2)}$$

นั่นคือ $y = 2^{\log(3x)}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ข้อ ข. ผิด

พิจารณาตัวเลือก ค.

สมมติให้ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$$2^{x_1} < 2^{x_2}$$

$$(\log x)^{2^{x_1}} < (\log x)^{2^{x_2}}$$

นั่นคือ $y = (\log x)^{2^x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ข้อ ค. ผิด

พิจารณาตัวเลือก ง.

สมมติให้ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$$2^{x_1} < 2^{x_2}$$

$$(\log x)^{2^{x_1}} < (\log x)^{2^{x_2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log(2^{x_1})} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(2^{x_2})}$$

นั่นคือ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(2^{x})}$ เป็นฟังก์ชันลด ข้อ ง. ถูกต้อง **เฉลยข้อ ง.**

4. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 10^{x-1} + \log x$

<u>**วิธีทำ**</u> เมื่อต้องการหาโดเมน วิธีที่ง่ายที่สุดคือพิจารณาว่าค่าอะไรที่แทนลงในฟังก์ชันไม่ได้ ในที่นี้ค่า x ที่แทนลงไปไม่ได้คือ $x \le 0$ (เพราะอะไร?) เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(0, \infty)$

ต่อไปเมื่อเราต้องการหาเรนจ์ก็ในทำนองเดียวกัน เพียงแต่จะต้องหาว่าเมื่อแทน x ที่เป็นไปได้ลงไปแล้ว จะให้ค่า f(x) อะไรบ้าง ซึ่งในที่นี้จะเห็นได้ชัดว่าได้แก่ R **เฉลยข้อ ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง**

5. กัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งมีค่าครึ่งชีวิต (half – life) 500 ปี ถ้าทิ้งสารนี้ไว้ 18,250 วัน จงหาว่าสารนี้จะมีปริมาณเหลือเป็นกี่เท่าของปริมาณเริ่มต้น (กำหนด log 1.07 = 0.03 และ log 1.10 = 0.041)

<u>**วิธีทำ**</u> จากสูตรที่กำหนดให้คือ $N_{\text{เหลือ}} = \frac{1}{2^n} \cdot N_{\text{เริ่มต้น}}$ และ $n = \frac{\text{ระยะเวลา}}{\text{ครึ่งชีวิต}}$

แทนค่าลงในสูตร $n = \frac{\text{ระยะเวลา}}{\text{ครึ่งชีวิต}} = \frac{\frac{18250}{365}}{500} = \frac{50}{500} = 0.1$ จะได้ว่า

$$\frac{N_{\text{เหลือ}}}{N_{\text{เริ่มต้น}}} = \frac{1}{2^{0.1}} = 2^{-0.1}$$

ใส่ logarithm ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\log\left(\frac{N_{\text{เหลือ}}}{N_{\text{เริ่มต้น}}}\right) = \log 2^{-0.1}$$

$= -0.1 (\log 2) = (-0.1)(0.301) = -0.0301$

$\log(\frac{N_{\text{เริ่มต้น}}}{N_{\text{เหลือ}}}) = 0.0301$

จะเห็นว่า $1.07 < \frac{N_{\text{เริ่มต้น}}}{N_{\text{เหลือ}}} < 1.10$ เพราะฉะนั้นในที่นี้ผมจะใช้วิธีเทียบบัญญัติไตรยางศ์เพื่อหาค่า antilogarithm ของ 0.0301 โดยทำได้ดังนี้

ค่า logarithm แตกต่างกัน $0.041 - 0.03 = 0.011$ ค่า antilogarithm ต่างกัน $1.10 - 1.07 = 0.03$

ค่า logarithm แตกต่างกัน $0.041 - 0.0301 = 0.0109$ ค่า antilogarithm ต่างกัน $\frac{0.03 \times 0.0109}{0.011}$

$= 0.03$

ดังนั้น $\log(1.10 - 0.03) \approx \log 1.07$

จะได้ว่า $\frac{N_{\text{เริ่มต้น}}}{N_{\text{เหลือ}}} = 1.07$

นั่นคือ $\frac{N_{\text{เหลือ}}}{N_{\text{เริ่มต้น}}} = \frac{1}{1.07} = 0.93$ **เฉลยข้อ ค.**

6. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชันลด (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>**วิธีทำ**</u> จากตัวเลือก ก. เปลี่ยนรูปใหม่ได้คือ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ซึ่งจากนิยามของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลทำให้ได้ว่าเป็นฟังก์ชันลด (เนื่องจาก $0 < a < 1$ จึงเป็นฟังก์ชันลด) ส่วนตัวเลือกอื่นๆ เป็นฟังก์ชันเพิ่มทั้งสิ้น **เฉลยข้อ ก.**

7. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2^x$ ที่จุด (3, 8) (กำหนดให้ $y' = a^x \ln a$ เมื่อ $a \neq 1$ และ $a > 1$)

<u>**วิธีทำ**</u> จากนิยามของความชันของเส้นสัมผัสจะได้ว่า

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง = อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน จะได้ว่า

$m_{\text{เส้นสัมผัส}}(3, 8) = 2^3(\ln 2) = 8 \ln 2$

จะได้ว่าสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $y - 8 = (8 \ln 2)(x - 3)$

$y = (8 \ln 2)(x - 3) + 8$ **เฉลยข้อ ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง**

8. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก, $A(x) : \exists x[x^{\log 2} > 1]$, $B(x) : \forall x[x^{\log 2} < -1]$ จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นจริง (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>**วิธีทำ**</u> พิจารณาค่าความจริงของประโยคเปิด A(x) ให้ $x = 3$ จะได้ว่า $3^{\log 2} > 1$ ซึ่งเป็นจริง

ต่อไปพิจารณาค่าความจริงของประโยคเปิด B(x) ให้ $x = 3$ จะได้ว่า $3^{\log 2} > 1$ ซึ่งเป็นเท็จ

โดยสรุป A(x) เป็นจริงภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และ B(x) เป็นเท็จภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก **เฉลยข้อ ข.**

ตอนที่ 2

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้จะต้องอาศัยการจัดรูปของสมการใหม่ให้ตรงตามรูปแบบของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
y &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{2x} \\
&= \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{x} \\
&= \left(\frac{4}{9}\right)^{x}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $0 < \frac{4}{9} < 1$ แสดงว่า $f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2x}$ เป็นฟังก์ชันลด **ตอบ**

2. กำหนดให้ $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{11}(x - f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่งเป็นจำนวนคู่บวกใดๆ จงหาค่าของ $fog(128)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
fog(128) &= f(g(128)) \\
&= f(\log_{11}(128 - f(128)) \\
&= f(\log_{11}(128 - \log_2 128) \\
&= f(\log_{11}(128 - \log_2 2^7) \\
&= f(\log_{11}(128 - 7) \\
&= f(\log_{11}(121) \\
&= f(\log_{11}(11^2) \\
&= f(2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ตอบ
