<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. จงหาค่าของ $\sin(\frac{21\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi) + \cos(\frac{21\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{3\pi}{4} - \pi)$

<u>วิธีทำ</u> จะสังเกตได้ว่ารูปร่างหน้าตาของโจทย์นั้นคล้ายๆ กัน สมมติว่า $A = \frac{21\pi}{4}$, $B = \sin(\frac{3\pi}{4} - \pi)$

จะเขียนรูปแบบของโจทย์ได้เป็น $\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sin(A + B)$

เพราะฉะนั้น $\sin(\frac{21\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi) + \cos(\frac{21\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{3\pi}{4} - \pi)$

$= \sin(\frac{21\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \pi)$

$= \sin(6\pi - \pi) = \sin 5\pi = 0$ **เฉลยข้อ ข.**

2. จงหาค่าของ $\cot(\frac{\pi}{4} - 2\pi) \cdot \sec(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\arctan 1)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\cot(\frac{\pi}{4} - 2\pi) \cdot \sec(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\arctan 1)$

$= -\cot(2\pi - \frac{\pi}{4}) \cdot \sec(\frac{\pi}{6})$

$= \cot(\frac{\pi}{4}) \cdot \sec(\frac{\pi}{6})$

$= 1 \cdot \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$ **เฉลยข้อ ก.**

3. จงหาค่าไซน์ของส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับ 18.84 หน่วย (กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ต้องการทราบค่าของ $\sin 18.84$

เนื่องจาก $\sin 18.84 = \sin(6 \cdot 3.14)$

$= \sin 6\pi$

$= 0$ **เฉลยข้อ ก.**

4. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = 3\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}$ ในช่วง $0 < x \leq \pi$

(กำหนดให้ $\frac{d}{du}(\cos u) = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$ และ $\frac{d}{du}(\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$)

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ปัญหานี้จะต้องใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาช่วยแก้

ขั้นแรก หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้

$$f'(x) = \frac{3}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\frac{3}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0$$

$$3\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} = 0$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{3}{4} = \tan 37^\circ$$

$$\frac{x}{2} = 37^\circ$$

แทนค่าวิกฤตคือ $\frac{x}{2} = 37^\circ$ ลงใน $f(x)$ จะได้

$$f(74^\circ) = 3\sin 37^\circ + 4\cos 37^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$$

เฉลยข้อ ค.

5. ถ้า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ $\tan\theta \cdot \sec\theta$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้เป็นลักษณะของการแก้สมการตรีโกณมิติโดยความช่วยเหลือของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ทำให้เกิดเป็นระบบสมการดังนี้

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{5} \quad \text{----------❶}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{----------❷}$$

พิจารณาสมการ ❶ จะเห็นว่า

$$\sin\theta = \cos\theta + \frac{1}{5} \quad \text{----------❸}$$

แทนค่าจากสมการ ❸ ลงในสมการ ❷ จะได้

$$(\cos\theta + \frac{1}{5})^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \frac{2}{5}\cos\theta + \frac{1}{25} + \cos^2\theta = 1$$

$$2\cos^2\theta + \frac{2}{5}\cos\theta - \frac{24}{25} = 0$$

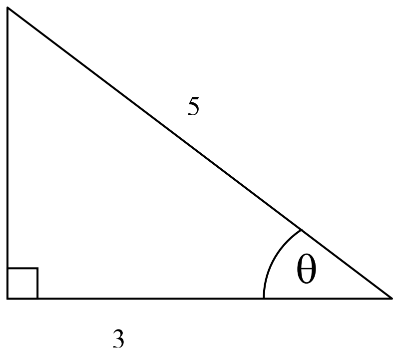
$50\cos^2\theta + 10\cos\theta - 24 = 0$ นำ 2 หารตลอดสมการจะได้ว่า

$$25\cos^2\theta + 5\cos\theta - 12 = 0$$

$(5\cos\theta + 4)(5\cos\theta - 3) = 0$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

แต่ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้นค่าที่เป็นไปได้มีเพียงค่าเดียวคือ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ นำค่าที่ได้นี้ไปวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ดังนี้



จากรูป จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{4}{3}$ และ $\sec\theta = \frac{5}{3}$

เพราะฉะนั้น $\tan\theta \cdot \sec\theta = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{20}{9}$ **เฉลยข้อ ก.**

6. จงหาค่าของ $\tan 380^\circ$ เมื่อ $\tan 20^\circ = 0.3640$

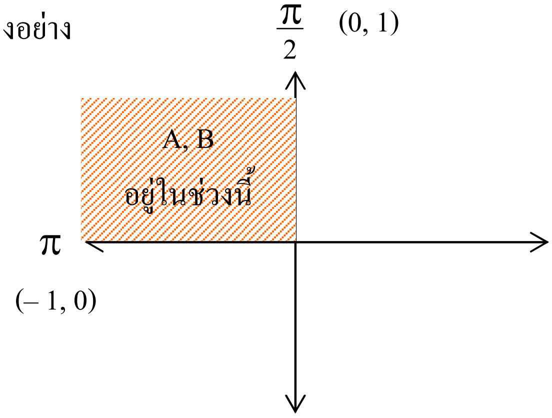
<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $\tan 380^\circ = \tan(360^\circ + 20^\circ)$

$= \tan 20^\circ$

$= 0.3640$ **เฉลยข้อ ค.**

7. ถ้า A และ B อยู่ในช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ จงหาว่า $\cos^2 B + \sin^2 A$ จะมีค่ามากที่สุดเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ผมค่อนข้างแน่ใจว่าเอ็นทรานซ์ไม่เคยคิดว่าจะออก นอกจากว่าผู้ออกข้อสอบต้องการวัดอะไรบางอย่าง



พิจารณาอย่างง่ายๆ จะเห็นได้ชัดว่า ถ้า A, B อยู่ในช่วง $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ไม่มีทางที่จะทำให้ $\cos^2 B + \sin^2 A$ มีค่าสูงสุดได้เลย

แสดงว่าค่าที่ทำให้ $\cos^2 B + \sin^2 A$ มีค่าสูงสุดคือ $\frac{\pi}{2}$ หรือ π เท่านั้น

ต่อไปจะพิจารณารายกรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $A = B = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \pi$ จะได้ $\cos^2\pi + \sin^2\frac{\pi}{2} = 2$

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้า $A = \pi$, $B = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\pi = 0$

<u>กรณีที่ 4</u> ถ้า $A = B = \pi$ จะได้ $\cos^2\pi + \sin^2\pi = 1$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ $\cos^2 B + \sin^2 A = 2$ **เฉลยข้อ ค.**

8. ถ้าแบ่งวงกลมหนึ่งหน่วยออกเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กัน แต่ละส่วนเรียกว่าเซกเตอร์ ถ้าลงสีลงบนเซกเตอร์หนึ่ง จงหาพื้นที่ของเซกเตอร์ดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีพื้นที่เท่ากับ π ตารางหน่วย ดังนั้นเมื่อแบ่งวงกลมนี้ออกเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กัน แต่ละส่วนจึงมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{\pi}{6}$ ตารางหน่วย **เฉลยข้อ ก.**

9. กำหนดให้ $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}$, $g(x) = x + c$ และ $0 < x \leq \pi$, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้า $fog(c) = -1$ แล้ว ข้อใดเป็นสมบัติของ g(x) (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> จาก $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = \cos x$

ดังนั้น $f(x) = \cos x$

เนื่องจาก $fog(x) = f(g(x))$

$= f(x + c)$

$= \cos(x + c)$

เพราะฉะนั้น $fog(c) = \cos (c + c) = \cos 2c$

แต่โจทย์กำหนด $fog(c) = -1$

จะได้ $\cos 2c = -1 = \cos \pi$

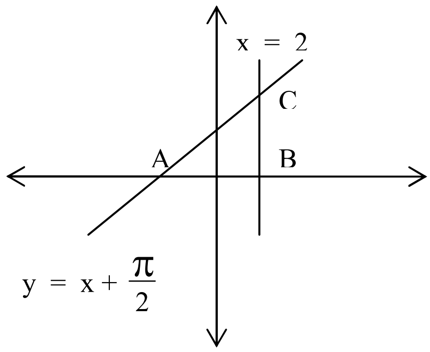
นั่นคือ $c = \frac{\pi}{2}$

แสดงว่า $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$

ต่อไปพิจารณาตัวเลือกแต่ละตัว

➲ จากข้อ ก. เมื่อแทน $y = 0$ จะได้ $x = -\frac{\pi}{2}$ นั่นคือจุดตัดแกน X คือ $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ไม่ใช่ $(\frac{\pi}{2}, 0)$ แสดงว่าข้อ ก. ผิด

➲ จากข้อ ข. วาดกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า AB ยาวเท่ากับ $2 + \frac{\pi}{2}$ และ BC ยาวเท่ากับ $2 + \frac{\pi}{2}$ เช่นกัน

เพราะฉะนั้นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $g(x)$, เส้นตรง $x = 2$ และแกน X มีค่าเท่ากับ

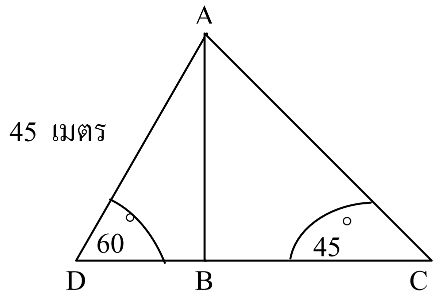
$$= \frac{1}{2} \times (2 + \frac{\pi}{2})(2 + \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 + \frac{\pi}{2})^2 \text{ ตารางหน่วย}$$

แสดงว่าข้อ ข. ถูกต้อง **เฉลยข้อ ข.**

10. ภูเขาลูกหนึ่งมีด้านเอียงทำมุม 45° และ 60° กับแนวระดับตามลำดับ ถ้าด้านเอียงข้างหนึ่งซึ่งทำมุม 60° ยาวเท่ากับ 45 เมตร จงหาความยาวของด้านเอียงอีกด้านหนึ่ง

<u>วิธีทำ</u> ลองวาดรูปตามข้อมูลที่โจทย์ให้มาจะได้ดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADB จะเห็นได้ว่า $AB = 45 \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{45\sqrt{3}}{2}$

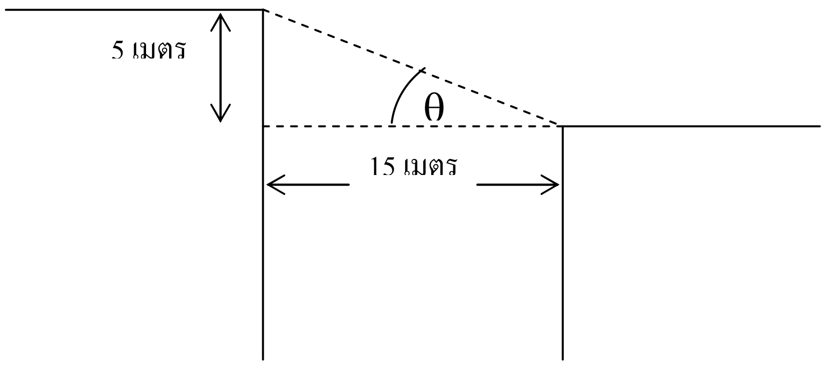
ต่อไปพิจารณาที่รูปสามเหลี่ยม ABC ก็จะเห็นได้ชัดอีกว่า $AC = AB \operatorname{cosec} 45^{\circ}$

เพราะฉะนั้น $AC = \frac{45\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{45\sqrt{6}}{2}$ **เฉลยข้อ ค.**

<u>ตอนที่ 2</u>

1. นักแสดงผาดโผนคนหนึ่งต้องการแสดงการขับรถข้ามช่องเขาซึ่งขาดออกจากกัน ช่องเขานี้อยู่ห่างกันตามแนวระดับเท่ากับ 15 เมตร แต่เนื่องจากยอดเขาลูกหนึ่งสูงกว่าอีกลูกหนึ่งเท่ากับ 5 เมตร จงหาว่านักแสดงคนนี้จะต้องขับรถเป็นระยะทาง<u>อย่างน้อย</u>กี่เมตรที่จะไม่ทำให้เกิดอุบัติเหตุตกลงไปในเหวลึก (กำหนดให้ $\tan 18.20 = 0.3288$, $\tan 18.30 = 0.3307$, $\sin 18.20 = 0.3123$, $\sin 18.30 = 0.3140$)

<u>วิธีทำ</u> ลองวาดรูปตามข้อมูลที่โจทย์ให้มา



จะเห็นว่ามุมที่แคบที่สุดที่จะต้องทำให้ได้เพื่อไม่ให้ตกเหวมีค่าเท่ากับ $\arctan(0.33)$

ต่อไปจะแสดงการหาค่ามุม θ โดยการเทียบบัญญัติไตรยางค์

ค่า tan เปลี่ยนไป $(0.3307 - 0.3288) = 0.0019$ ค่ามุมเปลี่ยนไป 0.10

ค่า tan เปลี่ยนไป $(0.3307 - 0.33) = 0.0007$ ค่ามุมเปลี่ยนไป $\frac{0.10 \times 0.0007}{0.0019} = 0.037$

ดังนั้นค่ามุม θ ที่ต้องการเท่ากับ $18.20 + 0.037 = 18.237$

ต่อไปพิจารณาจากรูป จะพบว่าค่าที่ต้องหาต่อไปคือ sin 18.237 โดยใช้วิธีเดียวกับการหาค่า tan คือการเทียบบัญญัติไตรยางค์ ดังนี้

ค่ามุมเปลี่ยนไป $18.30 - 18.20 = 0.10$ ค่า sin เปลี่ยนไป $0.3140 - 0.3123 = 0.0017$

ค่ามุมเปลี่ยนไป $18.30 - 18.237 = 0.063$ ค่า sin เปลี่ยนไป $\frac{0.0017 \times 0.063}{0.10} = 0.001$

ดังนั้น ค่า $\sin 18.237 = 0.3123 + 0.001 = 0.3133$

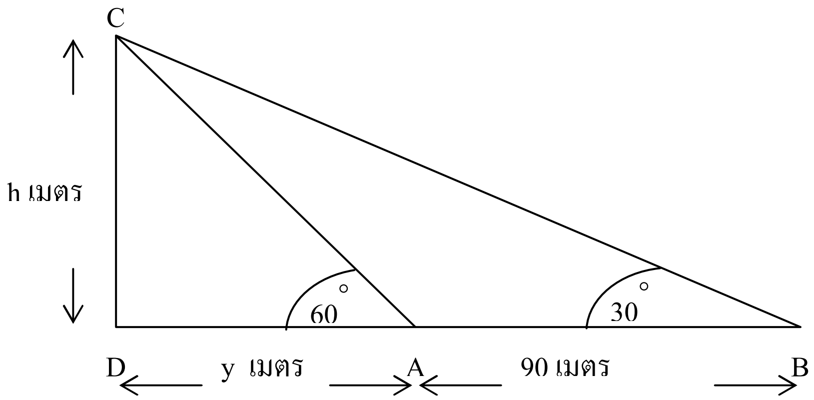
จะได้ว่าระยะทางที่สั้นที่สุดที่จะต้องขับรถยนต์ให้ข้ามช่องเขาแล้วไม่เกิดอุบัติเหตุตกเหว

$= \frac{5}{\sin 18.237} = 15.96$ เมตร **ตอบ**

<u>ข้อสังเกต</u> เพื่อความรวดเร็วในการแก้ปัญหาข้อนี้ บางคนอาจจะใช้วิธีของปีทากอรัสก็ได้ซึ่งก็ได้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกัน (ผมคำนวณได้ประมาณ 15.81 เมตร)

2. เรือ A ลอยอยู่ห่างจากเรือ B อยู่ 90 เมตร จากจุดที่เรือ A ลอยอยู่ลูกเรือสามารถมองเห็นยอดเขาที่อยู่ริมทะเลด้วยมุมเงย 60° และจากจุดที่เรือ B ลอยอยู่สามารถมองเห็นยอดเขาเดียวกันนี้ด้วยมุมเงย 30° จงหาว่ายอดเขาดังกล่าวอยู่สูงจากพื้นโลกเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> การแก้โจทย์ข้อนี้ถ้าวาดรูปก็จะมองเห็นปัญหาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น



สมมติว่ายอดเขานี้ (CD) สูง h เมตร และ DA ยาว y เมตร

พิจารณาที่รูปสามเหลี่ยม CDA จะได้ว่า

$$h = y \tan 60^\circ = y\sqrt{3} \quad \text{----------} ❶$$

ต่อไปพิจารณาที่รูปสามเหลี่ยม CDB จะได้ว่า

$$h = (y + 90) \tan 30^\circ = \frac{y+90}{\sqrt{3}} \quad \text{----------} ❷$$

จะเห็นว่า ❶ = ❷ นั่นคือ

$$\frac{y+90}{\sqrt{3}} = y\sqrt{3}$$

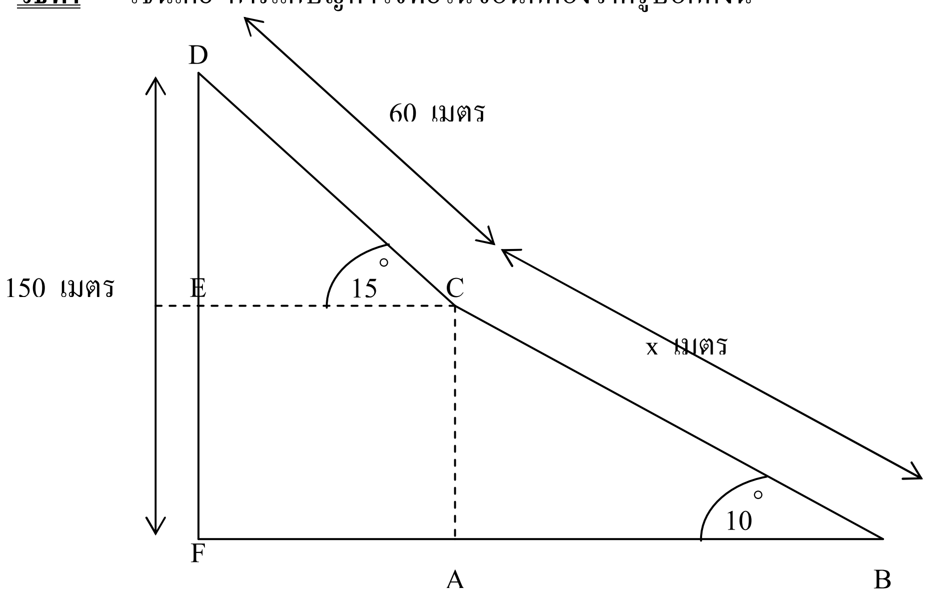
$$y + 90 = 3y$$

$$y = 45$$

จะได้ว่า DA ยาว 45 เมตร แทนค่าลงในสมการ ❶ ก็จะได้ว่ายอดเขานี้อยู่สูงจากพื้นดินเท่ากับ $45\sqrt{3}$ เมตร **ตอบ**

3. นายลอยต้องการขับรถขึ้นเนินเขาแห่งหนึ่งซึ่งทำมุม 10° กับแนวระดับ เมื่อรถเคลื่อนไปได้ระยะทาง x เมตร ปรากฏว่าเนินเขาทำมุม 15° กับแนวระดับ เมื่อขับไปได้ 60 เมตรก็ถึงจุดสูงสุดของเนินเขา ณ จุดดังกล่าวเขาทราบว่าอยู่สูงจากพื้น 150 เมตร จงหาระยะ x (กำหนดให้ $\sin 10^\circ = 0.174$, $\sin 15^\circ = 0.259$)

<u>**วิธีทำ**</u> เช่นเคย การแก้ปัญหาโจทย์ในข้อนี้ก็ต้องวาดรูปอีกดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยม DEC จะพบว่า $DE = 60 \sin 15^\circ = 60 \times 0.259 = 15.54$

เพราะฉะนั้น $EF = DF - DE = 150 - 15.54 = 134.46 = CA$

ต่อไปพิจารณาที่รูปสามเหลี่ยม CAB จะพบว่า $CA = x \sin 10^\circ$

จะได้ว่า $x = \dfrac{CA}{\sin 10^\circ} = \dfrac{134.46}{0.174} = 772.76$ เมตร **ตอบ**