<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องจำนวนเชิงซ้อน</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. กำหนดให้ $Z_1 = 3+4i$ และ $Z_2 = a+bi$ ถ้า $Z_1Z_2 = -1+7i$ จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของ Z_2 ในระบบพิกัดฉาก (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $Z_1Z_2 = -1+7i = (3+4i)(a+bi) = (3a-4b)+(4a+3b)i$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $3a-4b = -1$ ----------(1)

$4a+3b = 7$ ---------(2)

(1) x 4 $12a-16b = -4$ ----------(3)

(2) x 3 $12a+9b = 21$ ----------(4)

(3) – (4) $-25b = -25$

ได้ $b = 1$ แทนค่า b ลงใน (1) ได้ $a = 1$ เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ตำแหน่งของ Z_2 ในระบบพิกัดฉาก ได้แก่ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **<u>ตอบ</u>**

2. กำหนดให้ Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ถ้า $Z_2 = 2+i$ และ $Z_1Z_2 = 2+11i$ จงหา Z_1 (3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จาก $Z_1Z_2 = 2+11i$ จะได้ว่า

$Z_1 = \frac{1}{Z_2}(2+11i) = \frac{2+11i}{2+i}$ ----------(1)

คูณสมการ (1) ด้วยสังยุคของ $2+i$ คือ $2-i$ ได้ $Z_1 = \frac{2+11i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = 3+4i$ **<u>ตอบ</u>**

3. 1) จงหาค่าของ

$(i + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \ldots + \frac{1}{i+10}) - (2i + \frac{1-i}{2} + \frac{2-i}{5} + \frac{3-i}{10} + \frac{4-i}{17} + \ldots + \frac{9-i}{82} + \frac{10-i}{101})$

(3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาพจน์ $(i + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \ldots + \frac{1}{i+10})$ จะเห็นว่าสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมได้ คือ $i + \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{i+n}$

และในทำนองเดียวกันพจน์ $(2i + \frac{1-i}{2} + \frac{2-i}{5} + \frac{3-i}{10} + \frac{4-i}{17} + \ldots + \frac{9-i}{82} + \frac{10-i}{101})$ ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมได้เช่นกัน คือ $2i + \sum_{n=1}^{10} \frac{n-i}{n^2+1}$

ดังนั้น พจน์ที่โจทย์กำหนดให้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมได้คือ

$(i-2i) + \sum_{n=0}^{10}\frac{1}{i+n} + \sum_{n=1}^{10}\frac{n-i}{n^2+1}$ สังเกตให้ดีว่าพจน์ที่อยู่ในรูปของ summation นั้นยังรวมกันทีเดียวไม่ได้ เพราะว่าตัว running number ยังไม่เท่ากัน แต่เราสามารถทำให้เท่ากันได้โดยแทนค่า $n = 0$ ลงใน summation ชุดแรกก็จะได้เท่ากับ $\frac{1}{i} = -i$

นั่นคือ $(i-2i) + \sum_{n=0}^{10}\frac{1}{i+n} + \sum_{n=1}^{10}\frac{n-i}{n^2+1} = -2i + \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{i+n} + \sum_{n=1}^{10}\frac{n-i}{n^2+1}$

$$= -2i + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}+\frac{n-i}{n^2+1}\right)$$

$$= -2i + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}+\frac{n-i}{n^2-i^2}\right)$$

$$= -2i + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}+\frac{n-i}{(n-i)(n+i)}\right)$$

$$= -2i + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}+\frac{1}{n+i}\right)$$

$$= -2i + 2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}\right)$$

ตอบ

2) ถ้าขยายผลบวกในข้อ 1) เป็นผลบวกอนันต์จะทำได้หรือไม่ ถ้าทำได้แล้วผลบวกดังกล่าวมีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากผลบวกจำกัดในข้อ 1) เขียนอยู่ในรูป $-2i + 2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{i+n}\right)$

ดังนั้น ผลบวกอนันต์จึงเขียนในรูปของ $-2i + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i+n}\right)$

ต่อไปจะพิจารณาว่าผลบวกนี้มีหรือไม่ โดยแบ่งออกเป็น $\lim_{n\to\infty} 2i$ กับ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+i}\right)$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+i}\right) = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} 2i$ เข้าใกล้อนันต์

เพราะฉะนั้นอนุกรมนี้จึงไม่มีผลบวก **ตอบ**

3. กำหนดให้ $Z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ โดยที่ $|Z| = |1 - i|$, $a - b = 0$ และสังยุคของ Z อยู่ในควอดแรนต์เดียวกับจำนวนเชิงซ้อน $1 - i$ จงหาค่าและตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อน $4Z^4 - Z^6 + Z^8$ ในระบบพิกัดฉาก (8 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เริ่มจากเงื่อนไขที่โจทย์ให้มาคือ $|Z| = |1 - i|$ และ $a - b = 0$

จะได้ว่า $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ยกกำลังสองตลอดสมการจะได้

$a^2 + b^2 = 2$ -----(1)

$a - b = 0 \implies a = b$ แทนลงในสมการ (1) จะได้ $b^2 = 1$ ดังนั้น $b = 1$

แต่โจทย์กำหนดให้สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $Z = (a, b)$ อยู่ในควอดแรนต์เดียวกับ $1 - i$ แสดงว่า Z อยู่ในควอดแรนต์ที่ 1 จึงสรุปว่า $b = 1$ เพราะทำให้ (a, b) อยู่ในควอดแรนต์ที่ 1 นั่นเอง

และในที่สุดจะได้ว่า $Z = a + bi = 1 + i$

==> ต่อไปเราจะเปลี่ยน $Z = 1 + i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว และดำเนินการตอบคำถามตามที่โจทย์ต้องการดังต่อไปนี้

จาก $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ และ $\theta = \arctan(\frac{1}{1}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า

$Z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ นั่นคือ $Z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1) = -4$

$Z^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 8(-i) = -8i$

และ $Z^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1) = 16$

จะได้ $4Z^4 - Z^6 + Z^8 = 4(-4) - (-8i) + 16 = 8i$ เมื่อแทนจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวนี้ด้วยเวกเตอร์ ตำแหน่งในระบบพิกัดฉากจะได้ $(0, 8)$ แสดงว่าจำนวนเชิงซ้อนนี้อยู่บนแกน Y อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง 8 หน่วย **ตอบ**

4. กำหนดให้ $Z_1 = 4 + 3i$ และ $Z_2 = -3 - 4i$ จงหาค่าของ $\frac{Z_1}{Z_2}$ ในรูปเชิงขั้ว (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เริ่มจากการเปลี่ยน Z_1 และ Z_2 ให้อยู่ในรูปเชิงขั้วก่อน แล้วจึงค่อยหาค่าของ $\frac{Z_1}{Z_2}$

จากสูตร $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$ ดังนี้

จาก $Z_1 = 4 + 3i$ โดยที่ $a = 4, b = 3$ จะได้ว่า $r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ และ $\theta_1 = \arctan\frac{3}{4}$

และจาก $Z_1 = -3 - 4i$ โดยที่ $a = -3, b = -4$ จะได้ว่า $r_2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

และ $\theta_2 = \pi + \arctan\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

$= \left[\cos(\arctan\frac{3}{4} - \pi - \arctan\frac{3}{4}) + i\sin(\arctan\frac{3}{4} - \pi - \arctan\frac{3}{4})\right]$

$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$

$= \cos\pi - i\sin\pi$ **ตอบ**

5. จำนวนเชิงซ้อน $Z = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาค่าของ Z^5 และตำแหน่งของ Z^5 ในระบบพิกัดฉาก (5 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้อยู่ในรูป $a + bi$ ที่มี $a = 1$ และ $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$r = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ และ $\theta = \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\pi - \arctan(\frac{\sqrt{3}}{2})$

จากสูตร $Z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$

แทนค่า $n = 5$, $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ และ $\theta = 2\pi - \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$ ก็จะได้ว่า

$(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^5 = (\frac{\sqrt{7}}{2})^5[\cos(10\pi - 5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) + i\sin(10\pi - 5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2})]$

$= \frac{49\sqrt{7}}{32}[-\cos(-5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) + i\sin(-5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2})]$

$= \frac{49\sqrt{7}}{32}[-\cos(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) - i\sin(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2})]$ **ตอบ**

ต่อไปจะหาว่า Z^5 อยู่ในตำแหน่งใดของระบบพิกัดฉาก

เนื่องจาก Z^5 เขียนให้อยู่ในรูป $Z' = a + bi$ ซึ่งมี $a = -\cos(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$ และ

$b = -\sin(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$ แสดงว่า $(a, b) \in Q_3$ นั่นเอง **ตอบ**
