<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องจำนวนเชิงซ้อน</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. จงแสดงว่า $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ (3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} &= i^n(1 + i + i^2 + i^3) \\ &= i^n(1 + i - 1 - i) \\ &= i^n(1 - 1 + i - i) \\ &= i^n(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>ตอบ</u>

2. กำหนดให้ $Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1) $Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$ (5 คะแนน)

2) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$ (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> 1) การพิสูจน์ข้อนี้ผมจะแสดงให้ดู 2 วิธี โดยวิธีแรกจะใช้การคูณโดยตรงซึ่งง่ายกว่าอีกวิธีหนึ่งคือการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วก่อน

<u>วิธีที่ 1</u>

➲ จาก $Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a + bi)(c + di) = (ac + bci) + (adi + bdi^2) \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i \end{aligned}$$

Q.E.D.

<u>วิธีที่ 2</u>

➲ จาก $Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว ดังนี้

ให้ θ_1 และ θ_2 เป็นอาร์กิวเมนต์ของ Z_1 และ Z_2 ตามลำดับ

และ r_1 และ r_2 เป็นขนาดของ Z_1 และ Z_2 ตามลำดับ

ดังนั้น $Z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ และ $Z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

จะได้ว่า $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}\ [\cos(\arctan\frac{b}{a} + \arctan\frac{d}{c}) + i\sin(\arctan\frac{b}{a} + \arctan\frac{d}{c})]$

ให้ $p = \arctan\frac{b}{a}$ และ $q = \arctan\frac{d}{c}$ จะได้ว่า

$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}\ [\cos(p + q) + i\sin(p + q)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$ [cos p cos q – sin p sin q + i (sin p cos q + cos p sin q)]

$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ [\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} +$

$i\,(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}})]$

$= ac - bd + i\,(bc + ad)$ **Q.E.D.**

2) จาก $Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

คูณด้วยสังยุค (conjugates) ของ $c + di$ จะได้ว่า

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-di^2}$$

$$= \frac{(ac+bci)-(adi-bdi^2)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bc)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Q.E.D.

3. จงแสดงหรือยกตัวอย่างค้านว่า $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ เมื่อ Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $Z_1 = a + bi$ และ $Z_2 = c + di$ โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ

จะได้ว่า $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$

ดังนั้น $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ และ $|Z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|Z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$

จะได้ว่า $|Z_1| + |Z_2| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

ดังนั้น $(|Z_1| + |Z_2|)^2 = (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ -----(*)

ต่อไปพิจารณา $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2})^2$$

$$= [(a + c)^2 + (b + d)^2]^2$$

$$= [(a^2 + 2ac + c^2) + (b^2 + 2bd + d)]^2$$

$$= [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ac + bd)]^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ac + bd) + 4(ac + bd)^2$$

แทนค่าจากสมการ (*) ก็จะได้ว่า

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (|Z_1| + |Z_2|)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ac + bd) + 4(ac + bd)^2$$

เนื่องจาก $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ และ $ac + bd \geq 0$ เสมอทุกจำนวนจริง a, b, c, d ใดๆ

จึงได้ว่า $|Z_1 + Z_2|^2 \leq (|Z_1| + |Z_2|)^2$ นั่นคือ $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ **Q.E.D.**