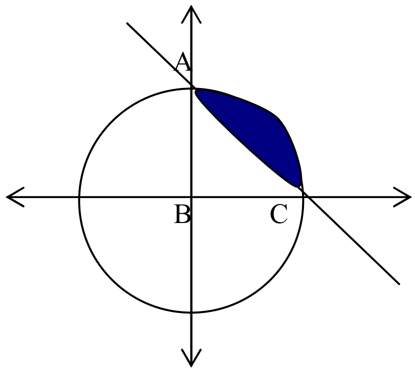
<u>**เฉลยแบบทดสอบ เรื่องความสัมพันธ์**</u>

1. กำหนดให้ $R_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 4\}, R_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y \geq 2\}$ เมื่อ R คือเซต ของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>**วิธีทำ**</u> พิจารณาข้อ ก. เราสามารถวาดกราฟของ $R_1 \cap R_2$ ได้ดังนี้



จากรูป พื้นที่สีน้ำเงิน คือ พื้นที่ของ $R_1 \cap R_2$ จะเห็นได้ว่าการหาพื้นที่สีน้ำเงินก็คือการหาพื้นที่ของ $\frac{1}{4}$ พื้นที่วงกลม – พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC นั่นเอง

ดังนั้น พื้นที่สีน้ำเงิน $= \frac{1}{4}$ พื้นที่วงกลม – พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC นั่นเอง

$= \frac{1}{4}\pi(2^2) - \frac{1}{2}(2)(2)$

$= \pi - 2$ ตารางหน่วย

ดังนั้น ข้อ ก. ถูกต้อง

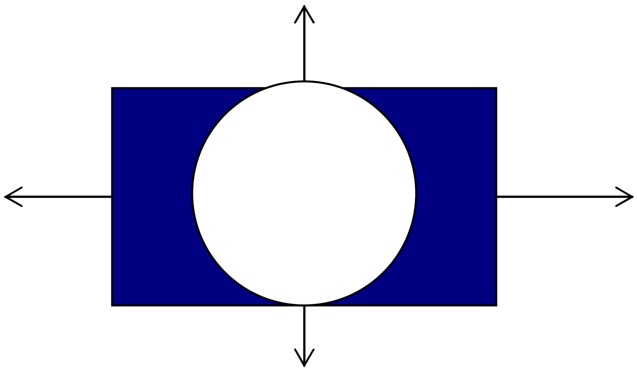
ต่อไปพิจารณาข้อ ข. จะเห็นว่ากราฟของ $R_1 \cup R_2$ ก็คือกราฟของวงกลมนั่นเองซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $\pi(2^2) = 4\pi$ ตารางหน่วย เพราะฉะนั้นข้อ ข. ไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาข้อ ค. จะเห็นว่าพื้นที่ของกราฟของความสัมพันธ์

$[R_2' \cup \{(x, y) \in R \times R \mid x + y = 2\}] \cap \{(x, y) \in R \times R \mid x \geq 0$ และ $y \geq 0\}$ ก็คือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC นั่นเอง ซึ่งจากข้อ ก. เราได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับ 2 ตารางหน่วย เพราะฉะนั้นข้อ ค. ไม่ถูกต้อง

สุดท้ายพิจารณาข้อ ง. จะเห็นว่าพื้นที่ของกราฟของความสัมพันธ์

$[R_1' \cup \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4\}] \cap \{(x, y) \in R \times R \mid |x| = 4$ และ $|y| = 2\}$ เป็นดังรูปข้างล่างนี้



วิธีการหาพื้นที่ของสีน้ำเงินก็คือหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า – พื้นที่ของวงกลม

$= (8)(4) - 4\pi = 32 - 4\pi$ ตารางหน่วย ดังนั้นข้อ ง. ไม่ถูกต้อง **ตอบข้อ ก.**

2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid xy \leq 8\}$, $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 6\}$ ข้อใดถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือกข้อ ก.

เนื่องจากกราฟของ R_1 เป็นกราฟของไฮเพอร์โบลามุมฉากที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เพียงอย่างเดียว เนื่องจาก (x, y) มาจากผลคูณคาร์ทีเซียนของ A, B ซึ่งไม่มีสมาชิกที่เป็นจำนวนลบอยู่เลย เพราะฉะนั้นข้อ ก. ไม่ถูกต้อง

พิจารณาตัวเลือกข้อ ข.

เซต $R_1 \cap R_2$ อธิบายด้วยภาษาธรรมดาก็คือค่า x, y ที่คูณกันแล้วน้อยกว่าหรือเท่ากับ 8 และบวกกันได้เท่ากับ 6 ในที่นี้มีเพียง 2 กรณีก็คือเมื่อ $x = 4, y = 2$ หรือเมื่อ $x = 2, y = 4$ ดังนั้นเซต $R_1 \cap R_2$ จึงมีสมาชิกเพียง 2 ตัว นั่นคือข้อ ข. ถูกต้อง

พิจารณาตัวเลือกข้อ ค.

จะเห็นว่ากราฟของความสัมพันธ์ R_2 เป็นเส้นตรง และจะเห็นได้อีกว่า R_2^{-1} เป็นกราฟของความสัมพันธ์ที่เป็นเส้นตรงซึ่งทับกับกราฟของความสัมพันธ์ R_1 พอดี ดังนั้นกราฟของ R_1 กับ R_1^{-1} จึงไม่ได้ทำมุมกัน 90 องศา เพราะฉะนั้นข้อ ค. ไม่ถูกต้อง **ตอบข้อ ข.**

3. กำหนดให้ $R = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก y จะหาได้เมื่อ $25 - x^2 \geq 0$ จะได้ $x^2 - 25 \leq 0$ แก้อสมการหาค่า x อยู่ในช่วง $[-5, 5]$ ดังนั้นโดเมนของ R คือเซต $[-5, 5]$ ข้อ ก. ไม่ถูกต้อง และจากสมการ $y = \sqrt{25 - x^2}$ ให้ $x = \sqrt{25 - y^2}$ จะเห็นว่า $25 - y^2 \geq 0$ นั่นคือ $-5 \leq y \leq 5$ แต่จาก $y = \sqrt{25 - x^2}$

จะเห็นได้ชัดว่า $y \geq 0$ เสมอ ดังนั้นเรนจ์ของ R คือช่วงปิด $[0, 5]$ ตัวเลือกข้อ ข. ไม่ถูกต้อง

ต่อไปพิจารณาตัวเลือกข้อ ค.

จะหาอินเวอร์สของ R_1 ทำโดยการสลับตัวแปร x, y จะได้ $x = \sqrt{25-y^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการจะได้ $x^2 = 25 - y^2$

ดังนั้น $y^2 = 25 - x^2$ ได้ $y = \pm\sqrt{25-x^2} \neq R_1$ เพราะฉะนั้นข้อ ค. ไม่ถูกต้อง

ตอบข้อ ง.

4. กำหนดให้ $R = \{(x, y) \mid y = \frac{2x-1}{x+5}\}$, $S = \{(x, y) \mid y = x\}$ ข้อใดถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือกข้อ ก. และข้อ ข. จะเห็นว่า $D_R = \{x \mid x \neq -5\}$ และ $R_R = \{y \mid y \neq 2\}$ เพราะฉะนั้นข้อ ข. ถูกต้องเพียงข้อเดียว ส่วนข้อ ค. ชัดเจนอยู่แล้ว **ตอบข้อ ข.**

5. ข้อใดถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือกข้อ ก.

เนื่องจาก $R_1 = \{(x, y) \mid y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}\}$ จะเห็นว่าโดเมนของ R_1 คือเซต $\{x \mid x < -3$ หรือ $x > 3\}$ และเรนจ์ของ R_1 คือเซตของจำนวนจริง (ไม่จำเป็นต้องเป็นบวกอย่างเดียว ผมขอให้คุณลองพิจารณาค่า x ที่อยู่ในโดเมนแล้วคุณจะทราบคำตอบ) ดังนั้นข้อ ก. ผิด

พิจารณาตัวเลือกข้อ ข.

เนื่องจาก $R_2 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}\}$ จะเห็นว่าโดเมนของ R_1 คือเซต $\{x \mid \frac{x}{x-1} \geq 0\}$ หรือก็คือเซต $\{x \mid x \leq 0$ หรือ $x > 1\}$ นั่นเอง และเรนจ์ของ R_1 ก็คือเซต $\{y \mid y \neq 1$ และ $y \neq -1\}$ ดังนั้นข้อ ข. ไม่ถูกต้อง

พิจารณาตัวเลือกข้อ ค.

เนื่องจาก $R_3 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2}\}$ หรือก็คือ $R_3 = \{(x, y) \mid y = |x|\}$ จะเห็นว่าโดเมนของ R_1 คือเซตของจำนวนจริงใดๆ และเรนจ์ของ R_1 ก็คือเซตของจำนวนจริงบวกใดๆ และเซตของศูนย์ด้วย เพราะฉะนั้นข้อ ค. ไม่ถูกต้อง

พิจารณาตัวเลือกข้อ ง.

เนื่องจาก $R_4 = \{(x, y) \mid y^2 = 2y + xy - 2x\}$ เมื่อจัดพจน์ใหม่แล้วจะเห็นว่าโดเมนของ

R_1 และเรนจ์ของ R_1 ก็คือเซตของจำนวนจริงใดๆ เพราะฉะนั้นข้อ ง. ถูกต้อง **ตอบข้อ ง.**

6. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $R = \{(x, y) \mid |y| = x^2 + 1\}$

วิธีทำ เนื่องจาก x ใดๆ ก็ตามเมื่อแทนลงใน x^2 แล้วไม่ทำให้เกิดข้อจำกัดใดๆ ทั้งสิ้น เพราะฉะนั้นโดเมนของ R คือเซตของจำนวนจริงใดๆ ต่อไปพิจารณาเรนจ์

จากสมการ $|y| = x^2 + 1$ จะได้ว่า $x^2 = |y| - 1$ สังเกตว่าทางซ้ายของสมการมีค่ามากกว่า 0 สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้น ทางขวาของสมการจึงมากกว่า 0 ด้วยโดยปริยาย

นั่นคือ $|y| - 1 \geq 0 \Rightarrow |y| \geq 1$ โดยนิยามของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $y \leq -1$ หรือ $y \geq 1$

จะได้เรนจ์ของความสัมพันธ์คือเซต $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **ตอบข้อ ค.**

7. กำหนดให้ $R_1 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$, $R_2 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid x \text{ หาร } y \text{ ลงตัว}\}$ ข้อใดถูกต้อง (พิจารณาตัวเลือกในโจทย์)

วิธีทำ เนื่องจาก $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y \text{ หาร } x \text{ ลงตัวหรือ } x \text{ หาร } y \text{ ลงตัว}\}$ มีสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน ดังนั้น $R_1 \cup R_2$ จึงเป็นเซตอนันต์ เพราะฉะนั้นข้อ ก. ถูกต้อง และเนื่องจากโดเมนของ $R_1 \cup R_2$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นเซตอนันต์ ดังนั้นข้อ ข. ถูกต้อง

สำหรับข้อ ค. นั้นชัดเจนอยู่แล้ว (คุณสามารถพิสูจน์อย่างง่ายๆ ได้ด้วยตัวเอง) **ตอบข้อ ง.**

8. กำหนดให้ $R_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = -1\}$, $R_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + 2y = -4\}$ ข้อใดถูกต้อง

วิธีทำ ก่อนอื่นเรามาหาก่อนว่ากราฟของความสัมพันธ์ R_1 และ R_2 เป็นลักษณะใด

จาก $x^2 + y^2 = -1$ จะเห็นว่ากราฟเป็นวงกลมในระนาบเชิงซ้อนซึ่งไม่พิจารณาในที่นี้ และจาก $x^2 + 2y = -4$ เมื่อจัดรูปใหม่จะได้ว่า $y = \frac{-x^2}{2} - 2$ ซึ่งเป็นกราฟของพาราโบลา

เมื่อพิจารณาตัวเลือกแต่ละตัวจะพบว่าข้อ ก. ผิดแน่นอน เนื่องจากว่าไม่มีจุดตัดระหว่าง R_1 กับ R_2 สำหรับข้อ ข. นั้นถูกต้องแน่นอน (จากการพิจารณาในช่วงแรก) แต่สำหรับข้อ ค. นั้นไม่ถูกต้อง (ขัดแย้งกับที่เราพิจารณาในตอนแรก) **ตอบข้อ ข.**

9. กำหนดให้ $R = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2x-5}{x+1}\}$ ข้อใดคือโดเมนของ R^{-1}

วิธีทำ เนื่องจากโดเมนของ R^{-1} = เรนจ์ของ R ดังนั้นในที่นี้เราจะพิจารณาเรนจ์ของ R ดังนี้

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = \frac{2y-5}{y+1}$ จะได้ว่า $x(y + 1) = 2y - 5$

$$xy + x = 2y - 5$$

$$xy - 2y = -x - 5 = -(x + 5)$$

$$y(x-2) = -(x+5)$$

$$y = -\frac{(x+5)}{x-2}$$

สมการข้างต้นจะหาได้เมื่อ $x \neq 2$ ดังนั้นเรนจ์ของ R คือเซต $\{y \mid y \neq 2\}$ **ตอบข้อ ง.**

10. กำหนดให้ A, B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U และ A, B ไม่มีส่วนร่วมกัน ถ้า $n(A) = 3$ $n(B) = 2$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $P(A \times B)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากจำนวนสมาชิกของ power set เท่ากับ $2^{n(A)}$ เมื่อ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A

ดังนั้นจำนวนสมาชิกของเซต $P(A \times B) = 2^{n(A \times B)} = 2^{n(A) \times n(B)}$

$$= 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$$

ตอบข้อ ง.