<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน ตอนที่ 2</u>

1. จงหาโดเมนของ $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}}{2x+1}$ (3 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> การหาโดเมนของฟังก์ชันนี้จะพิจารณาค่าหรือช่วงที่ไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันได้ ซึ่งเราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ

(1) $2x + 1 = 0$ จะได้ $x = -\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq 0$

จาก $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq 0$

$(2x-1)(x+1) \leq 0$ และ $x \neq -1$

ค่าวิกฤต x ได้แก่ $-1, \dfrac{1}{2}$ เพราะฉะนั้นเซตคำตอบสำหรับกรณีนี้คือ $(-1, \dfrac{1}{2}]$

ได้เซตของจำนวนจริงที่ไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันได้คือ $(-1, \dfrac{1}{2}]$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ $R - (-1, \dfrac{1}{2}] = (-\infty, -1] \cup (\dfrac{1}{2}, \infty)$ **<u>ตอบ</u>**

2. กำหนดให้ f(x) = จำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ x, g(x) = จำนวนเต็มลบที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x จงหาค่าของ gof(2.999…) + fog(– 2.999…) (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> จาก gof(2.999…) = g(f(2.999…))

= g(จำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 2.999…)

= g(3)

= – 1

จาก fog(– 2.999…) = f(g(– 2.999…))

= f(จำนวนเต็มลบที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ – 2.999…)

= f(– 3)

= 1

เพราะฉะนั้น gof(2.999…) + fog(– 2.999…) = – 1 + 1 = 0 **<u>ตอบ</u>**

3. กำหนดให้ $h(x) = u(x) \cdot v(x)$ โดยที่ $u(x) = x^2 - 3x + c$, $v(x) = 2x + k$ และ c, k เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $h(1) = 0$ และ $h(0) = -2$ แล้วจงหาค่าของ $c^2 + k^2$ (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากโจทย์กำหนด $h(1) = 0$, $h(0) = -2$ เพราะฉะนั้น

$h(1) = u(1) \cdot v(1)$

$= (1 - 3 + c)(k + 2)$

$= (c-2)(k+2)$

ดังนั้น $(c-2)(k+2) = 0$

$ck - 2k + 2c - 4 = 0$ -----(1)

และ $h(0) = u(0)\cdot v(0)$

$= (c)(k) = -2$ -----(2)

แทนค่าจากสมการ (2) ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$-2 - 2k + 2c - 4 = 0$$

$$2(c-k) = 6$$

$$c - k = 3$$

$$c = k + 3 \quad \text{-----(3)}$$

แทนค่าจากสมการ (3) ลงในสมการ (2) จะได้ว่า

$$k(k+3) = -2$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

ได้ค่า $k = -1, -2$ และ $c = 2, 1$ ตามลำดับ และจากการตรวจสอบจะได้ว่าค่า c, k สอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 2 ชุด เพราะฉะนั้น $c^2 + k^2 = (2)^2 + (-1)^2 = (1)^2 + (-2)^2 = 5$ **<u>ตอบ</u>**

4. กำหนดให้ $f(x+2) = x - 1,\ g(x) = 2$ ถ้า $h^{-1}(x) = f(x)\cdot g(x)$ จงหา $h(4)$ (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นจะต้องเปลี่ยนรูป $f(x+2)$ ให้อยู่ในรูป $f(x)$ โดยการเปลี่ยนตัวแปรจะได้ว่า $f(x) = x - 3$ ต่อไปจะหา $f(x)\cdot g(x)$ ซึ่งจะต้องตรวจสอบก่อนว่าหาได้โดยใช้ทฤษฎีของพีชคณิตของฟังก์ชัน ซึ่งจะมีผลคูณเมื่อ $D_f \cap D_g \neq \phi$ ในที่นี้จะได้ว่า $D_f = D_g = R \neq \phi$

เพราะฉะนั้น $h^{-1}(x) = (x-3)(2) = 2x - 6$

ต่อไปจะต้องหา $h(x)$ โดยใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับอินเวอร์ส ซึ่ง $h^{-1}(x)$ จะมีอินเวอร์สเมื่อ $h^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งจากการตรวจสอบโดยการแทนค่า x ค่าหนึ่งลงไปจะได้ y เพียงค่าเดียว แสดงว่ามีอินเวอร์ส จะได้ว่า $h(x) = [h^{-1}(x)]^{-1}$ ต่อไปจะหาอินเวอร์สของ $2x - 6$ โดยการสลับตัวแปรจะได้ $h(x) = \dfrac{x+6}{2}$ เพราะฉะนั้น $h(4) = \dfrac{4+6}{2} = 5$ **<u>ตอบ</u>**

5. กำหนดให้ $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} - 2,\ g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{1}{2x}$ จงหาค่าของ $(fog)^{-1}(1)$ (4 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $R_g \cap D_f = D_{g^{-1}} \cap R_{f^{-1}}$

$= [R - \{0\}] \cap [R - \{-2\}]$

$= (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty) \neq \phi$

เพราะฉะนั้นหา $fog(x)$ ได้แน่นอน

จาก $g^{-1}(x) = y = 1 - \frac{1}{2x}$ จะหา g(x) โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

ให้ $x = 1 - \frac{1}{2y} = \frac{2y - 1}{2y}$

$2xy = 2y - 1$

$y(2x - 21) = -1$

เพราะฉะนั้น $y = g(x) = \frac{-1}{2(x - 1)}$ และสามารถใช้วิธีการทำนองเดียวกันนี้หา $y = f(x) = \frac{3}{x + 2}$

จาก
$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{-1}{2x - 2}\right) \\ &= \frac{3}{\left(\frac{-1}{2x-2}\right) + 2} = \frac{6x - 6}{4x - 5}\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาค่า $(fog)^{-1}(x)$ โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปร ดังนี้

ให้ $x = \frac{6y - 6}{4y - 5}$

$4xy - 5x = 6y - 6$

$4xy - 6y = 5x - 6$

$y(4x - 6) = 5x - 6$

เพราะฉะนั้น $y = (fog)^{-1}(x) = \frac{5x - 6}{4x - 6}$ ดังนั้น $(fog)^{-1}(1) = \frac{1}{2}$ **ตอบ**

6. กำหนดให้ P เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีดีกรีสูงสุดเท่ากับ 3 ที่มีรูปแบบคือ $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดยที่ $P_3(0) = P_3'(0) = 1$, $P_3''(\frac{1}{2}) = 1$ และ $P_3'''(x) = 12$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
จงหาค่าของ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ (4 คะแนน)

วิธีทำ จากสมการ $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ -----(1)

จะได้ว่า $P_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ -----(2)

$P_3''(x) = 6ax + 2b$ -----(3)

$P_3'''(x) = 6a$ -----(4)

โจทย์กำหนดให้ว่า $P_3(0) = P_3'(0) = 1$, $P_3''(\frac{1}{2}) = 1$ และ $P_3'''(x) = 12$

แทนค่า $P_3'''(x) = 12$ ลงในสมการ (4) จะได้ว่า $6a = 12$ ดังนั้น $a = 2$

แทนค่า $P_3''(\frac{1}{2}) = 1$ ลงในสมการ (3) จะได้ว่า $3a + 2b = 1$ ดังนั้น $b = -\frac{5}{2}$

แทนค่า $P_3'(0) = 1$ ลงในสมการ (2) จะได้ว่า $c = 1$

แทนค่า $P_3(0) = 1$ ลงในสมการ (1) จะได้ว่า $d = 1$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} &= \sqrt{(2)^2 + (-\tfrac{5}{2})^2 + (1)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-\tfrac{5}{2})^2 + (1)^2 + (1)^2}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4+\frac{25}{4}+1+1}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$ **<u>ตอบ</u>**