<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน ตอนที่ 1</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 0 ถึง 3 และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 4 จงหาว่าถ้าต้องการสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B จะสร้างได้กี่ฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาเซต A มีสมาชิกคือ $\{1, 2, 3\}$ และเซต $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จะเห็นว่า

$1 \in A$ จับคู่กับสมาชิกใน B ได้ 4 ตัว

$2 \in A$ จับคู่กับสมาชิกใน B ได้ 4 ตัว

$3 \in A$ จับคู่กับสมาชิกใน B ได้ 4 ตัว

จะเห็นว่าจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดเท่ากับ $4 \times 4 \times 4 = 64$ ฟังก์ชัน **เฉลยข้อ ง.**

2. กำหนดให้ $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $fog(x)$

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นให้พิจารณาก่อนว่า $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

เนื่องจาก $R_g = [0, \infty)$ และ $D_f = (-\infty, \infty)$ แสดงว่า $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ นั่นคือมี $fog(x)$

$f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

เพราะฉะนั้น
$$fog(x) = f(g(x)) = f(|x|) = ||x||$$

จะเห็นได้ชัดว่าโดเมนคือเซตของจำนวนจริง และเรนจ์คือเซต $\{y \mid y \geq 0\}$ **เฉลยข้อ ก.**

3. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง จงหาค่าของ $g(100) - f(100)$ (พิจารณาค่าของฟังก์ชันจากตารางในกระดาษคำถาม)

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ไม่ได้กำหนดฟังก์ชันมาให้ แต่กำหนดค่าของฟังก์ชันมาให้ ในการทำโจทย์นี้จึงมีวิธีทำ 2 วิธี

<u>วิธีที่ 1</u> นิยามฟังก์ชัน f, g โดยที่ $f(x) = ax + b$ และ $g(x) = cx + d$ -----(1)

จากตาราง ให้เลือกค่าของฟังก์ชันมาแทนในสมการ (1)

ในที่นี้เลือก $f(1) = 0, f(2) = 1$ และ $g(1) = 1$, $g(2) = 3$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (1) จะได้ระบบสมการ 2 ระบบสมการที่เป็นอิสระต่อกันแน่นอน ดังนี้

$a + b = 0$

$2a + b = 1$

และ $c + d = 1$

$2c + d = 3$

แก้ระบบสมการได้ $a = 1, b = -1$ และ $c = 2, d = -1$ ดังนั้น $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = 2x - 1$

นั่นคือ $g(100) - f(100) = [2(100) - 1] - (100 - 1) = 199 - 99 = 100$ **เฉลยข้อ ข.**

<u>วิธีที่ 2</u> ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังตารางต่อไปนี้

x	f(x)	g(x)
1	0	1
2	1	3
3	2	5
4	3	7
5	4	9
6	5	11
…	…	…
x	x – 1	2x – 1

เพราะฉะนั้น $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x - 1$

นั่นคือ $g(100) - f(100) = [2(100) - 1] - (100 - 1) = 199 - 99 = 100$ **เฉลยข้อ ข.**

4. กำหนดให้ $f(x) = -x, g(-x) = x$ จงหาค่าของ $fog(x - 1)$ (ถ้ามี)

<u>**วิธีทำ**</u> ข้อนี้จะต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน g เพื่อให้แทนค่าได้สะดวก ในที่นี้สมมติให้ $t = -x$

แทนค่าลงไปจะได้ $g(t) = -t$ แทนค่า $t = x$ จะได้ $g(x) = -x$

เพื่อความรวดเร็วอาจละการตรวจสอบว่า $R_g \cap D_f \neq \varnothing$ หรือไม่ เนื่องจากว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งสามารถหาโดเมนและเรนจ์ได้เท่ากันตลอด

จากโจทย์
$$\begin{aligned} fog(x-1) &= f(g(x-1)) \\ &= f(-(x-1)) \\ &= f(1-x) \\ &= -(1-x) \\ &= x-1 \end{aligned}$$
เฉลยข้อ ค.

5. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = |x + 1|$ จงหาเรนจ์ $gof(x)$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $R_f \cap D_g = R \cap R = R \neq \varnothing$ แสดงว่าหาค่าของ gof(x) ได้แน่นอน

จาก
$$\begin{aligned} gof(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x-1) \\ &= |2x-1+1| \\ &= |2x| \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $y = gof(x) = |2x|$ เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ **เฉลยข้อ ง.**

6. กำหนดให้ $f(x) = x - 1,\ g(x) = 2f(x)$ จงหาค่าของ $gof(2)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก

$$\begin{aligned} gof(2) &= g(f(2)) \\ &= g(1) \\ &= 2f(1) \\ &= 2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เฉลยข้อ ก.

7. ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3},\ g(x) = \frac{x+1}{2}$ จงหาค่าของ $g^{-1}of(0)$

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ข้อนี้จะเห็นว่าส่วนที่โจทย์กำหนดให้กับส่วนที่ต้องการหาคำตอบอยู่ตรงข้ามกันโดยสิ้นเชิง โดยจะต้องแปลงฟังก์ชันให้อยู่ในรูปอินเวอร์สเสียก่อน แต่ก่อนจะหานั้นจะต้องตรวจสอบก่อนว่าฟังก์ชันนั้นมีอินเวอร์สหรือไม่โดยตรวจสอบว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ ดังนี้

*** วิธีตรวจสอบว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ทำได้โดยแทนค่า x ลงไปค่าหนึ่ง แล้วตรวจสอบว่าให้ค่า y เพียงค่าเดียวหรือไม่ ถ้าให้ค่า y เพียงค่าเดียวก็แสดงว่าฟังก์ชันนั้นเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ***

ซึ่งจากการตรวจสอบพบว่าทั้ง $f^{-1}(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแสดงว่ามีอินเวอร์สแน่ๆ จากนั้นจึงใช้ทฤษฎีที่ว่า $f(x) = (f^{-1}(x))^{-1}$

จาก $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3}$ เมื่อหาอินเวอร์สก็จะได้ $f(x)$ ตามต้องการซึ่งทำได้ดังนี้

ให้ $y = \frac{2x-1}{3}$ จะได้ $x = \frac{2y-1}{3}$

$$\begin{aligned} 3x &= 2y - 1 \\ 2y &= 3x + 1 \\ y &= f(x) = \frac{3x+1}{2} \end{aligned}$$

จาก $g(x) = \frac{x+1}{2}$ เมื่อหาอินเวอร์สก็จะได้ $g^{-1}(x)$ ตามต้องการซึ่งทำได้ดังนี้

ให้ $y = \frac{x+1}{2}$ จะได้ $x = \frac{y+1}{2}$

$$\begin{aligned} 2x &= y + 1 \\ y &= g^{-1}(x) = 2x - 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g^{-1}of(0) &= g^{-1}(f(0)) \\ &= g^{-1}(\tfrac{1}{2}) \\ &= 2(\tfrac{1}{2}) - 1 = 0 \end{aligned}$$

เฉลยข้อ ข.

8. ถ้า $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{x-1}{2}$ และกำหนดให้ $F(x) = f^{-1}og(x)$ แล้ว $goF^{-1}(x)$ คือข้อใด

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีของฟังก์ชันคอมโพสิทจะหาได้ก็ต่อเมื่อ $R_{F^{-1}} \cap D_g \neq \varnothing$ ซึ่งจากการตรวจสอบก็จะพบว่าเป็นไปตามเงื่อนไข ดังนั้นจึงหาคอมโพสิทได้ แต่ในที่นี้ผมจะไม่หาคอมโพสิท และเราจะมุ่งไปหา $F^{-1}(x)$ แทน (ขั้นตอนนี้ผมทำเพียงเพื่อยืนยันว่ามีคอมโพสิท)

จากทฤษฎีเกี่ยวกับอินเวอร์สของฟังก์ชันคอมโพสิท คือ $(gof)^{-1}(x) = f^{-1}og^{-1}(x)$

ในทำนองเดียวกันจาก $F(x) = f^{-1}og(x)$ จะได้ว่า

$$F^{-1}(x) = (f^{-1}og)^{-1}(x)$$
$$= g^{-1}of(x)$$

พิจารณา $goF^{-1}(x) = gog^{-1}of(x)$ ----------★

$$= g(g^{-1}(f(x)))$$
$$= g(g^{-1}(3x-2))$$
$$= 3x - 2$$

เฉลยข้อ ง.

<u>ข้อสังเกต</u> (1) จากสมการ ★ ถ้าเราแน่ใจว่า g มีอินเวอร์สแน่ๆ เราก็อาจไม่พิจารณา g ก็ได้ ซึ่งจะเหลือเพียง f(x) ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันคอมโพสิทอีกต่อไปจึงเป็นคำตอบที่ต้องการ

(2) ข้อนี้จะเห็นว่าผมเสียเวลาเพียงเล็กน้อยเพื่อหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน $F^{-1}(x)$ นอกนั้นใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับอินเวอร์สกับเรื่องฟังก์ชันคอมโพสิทมาแก้ปัญหา ถ้าหากไม่มีทักษะในการสังเกตแล้วเชื่อแน่ว่าข้อนี้จะต้องเสียเวลาพอสมควร

9. นิยามฟังก์ชัน $h = f \cdot g = \{(x, y) \mid y = f(x) \cdot g(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 1\}$ ถ้า $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ และ $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$ จงหา $g(5)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$

ตามทฤษฎีเรื่องพีชคณิตของฟังก์ชัน g(x) หาค่าได้เมื่อ $D_h \cap D_f \neq \varnothing$

พิจารณา h(x) จะหาค่าไม่ได้เมื่อ $x^2 - 1 = 0$ หรือ $x = 1, -1$

ดังนั้น $D_h = R - \{1, -1\}$

ต่อไปพิจารณา f(x) จะหาค่าไม่ได้เมื่อ $x^2 - 1 \leq 0$ หรือ $[-1, 1]$

ดังนั้น $D_f = R - [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

จะเห็นได้ชัดว่า $D_h \cap D_f \neq \varnothing$ เพราะฉะนั้นหา g(x) ได้แน่นอน

นั่นคือ $g(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$= (x^2-1)^{-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-1)^{-2}}}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$$

และได้ว่า $g(5) = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{25-1}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{10\sqrt{6}}$ **เฉลยข้อ ค.**

10. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ (ดูข้อความจากโจทย์)

<u>**วิธีทำ**</u> ➲ พิจารณาข้อ 1.

เนื่องจาก $f(x)+g(x) = \sqrt{x}+x-2$ ดังนั้น $[f(x)+g(x)]^{-1} = x^2+x+2$

เนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x}+2$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = (x-2)^2 = x^2-4x+4$

และ $g(x) = x-4$ ดังนั้น $g^{-1}(x) = x+4$

จะได้ว่า $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = x^2-4x+4+x+4 = x^2-3x+8 \neq x^2+x+2$

เพราะฉะนั้นข้อ 1. ผิดแน่นอน

➲ พิจารณาข้อ 2.

จากโจทย์ $f(x) = x^3-1$

ก่อนอื่นให้พิจารณาว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ โดยการแทนค่า x ค่าหนึ่ง ปรากฏว่าได้ค่า y เพียงค่าเดียว แสดงว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือมีอินเวอร์สแน่นอน

ต่อไปจะหาอินเวอร์สของ f(x) โดยการสลับตัวแปร โดยให้ $x = y^3-1$

จะได้ว่า $y^3 = x+1$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x+1}$

จากโจทย์กล่าวว่าอินเวอร์สของ f(x) เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เราก็แทนค่า x ค่าหนึ่งลงไปปรากฏว่าได้ค่า y เพียงค่าเดียว เพราะฉะนั้นแสดงว่า $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือข้อ 2. ถูกแน่นอน

➲ พิจารณาข้อ 3.

จากโจทย์จะต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ให้อยู่ในรูป f(x) โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

ให้ $t = x^2-1$ จะได้ $x = \sqrt{t+1}$ (ไม่ใช้ค่าลบเพราะ $x \in R^+$) เพราะฉะนั้น

$f(t) = \sqrt{t+1}+1$ จะได้ $f(x) = \sqrt{x+1}+1$

===> ต่อไปจะหา g(x) จาก fog(x) = 2x – 5 จะได้

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1}+1 = 2x-5$$

$$\sqrt{g(x)+1} = 2x-6$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$g(x)+1 = 4(x^2-6x+9) = 4x^2-24x+36$$

$$g(x) = 4x^2-24x+35$$

===> ต่อไปจะหา h(x) จาก foh(x) = x + 3 จะได้

$$f(h(x)) = \sqrt{h(x)+1} + 1 = x + 3$$

$$\sqrt{h(x)+1} = x + 2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$h(x) + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$h(x) = x^2 + 4x + 3$$

เพราะฉะนั้น $goh(0) = g(h(0))$

$$= g(3)$$

$$= 4(3)^2 - 24(3) + 35$$

$$= 36 - 72 + 35$$

$$= -1$$

สรุป ข้อ 3. ถูกต้องอีกเช่นกัน

➲ พิจารณาข้อ 4.

จะเห็นว่า h(x) จะหาได้เมื่อ $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ ดังนั้น เราจึงต้องพิจารณา D_f และ D_g ดังนี้

จาก $f(x) = \frac{1}{x}$ จะเห็นได้ชัดว่า $D_f = R - \{0\}$

จาก $g(x) = x^2 - 1$ จะเห็นได้ชัดว่า $D_g = R$

สรุปแล้ว $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ ฉะนั้นหาค่า h(x) ได้แน่นอน

จาก $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= \frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)$$

$$= x - \frac{1}{x}$$

สรุป ข้อ 4. ก็ถูกต้องเช่นกัน

สรุปรวมยอดจากที่เราพิจารณามาทั้ง 4 ข้อ จึงตอบข้อ ก. **เฉลยข้อ ก.**