<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องเมทริกซ์</u>

<u>ตอนที่ 1</u>

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $|ABC|^{-1}$

<u>**วิธีทำ**</u> โจทย์ข้อนี้เป็นลักษณะของการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการใช้กฎของดีเทอร์มิแนนต์

เนื่องจาก
$$|ABC|^{-1} = \frac{1}{|ABC|} = \frac{1}{|A|\cdot|B|\cdot|C|}$$
$$= \frac{1}{(4-6)(18-20)(40-42)}$$
$$= \frac{1}{(-2)(-2)(-2)}$$
$$= -\frac{1}{8}$$

ตอบข้อ ค.

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ถ้า $|A| = 3, |B| = 1$ จงหาค่าของ $|AB|^{-1}$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก
$$|AB|^{-1} = \frac{1}{|A|\cdot|B|}$$
$$= \frac{1}{(3)(1)}$$
$$= \frac{1}{3}$$

ตอบข้อ ก.

3. จงหาค่าตัวแปร x, y, z ของระบบสมการต่อไปนี้

$x + 2y - z = 0$ ----------❶

$2x + y + z = 3$ ----------❷

$x + y + 2z = 5$ ----------❸

<u>**วิธีทำ**</u> ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงวิธีการหาคำตอบของระบบสมการให้ดู 2 วิธี

➲ วิธีแรก วิธีทางพีชคณิต (ม.3 แต่ยุ่งยากกว่า)

นำสมการ ❶ + ❷ จะได้

$3x + 3y = 3$ จะได้ว่า $x + y = 1$ ----------❹

แทนสมการ ❹ ลงในสมการ ❸ จะได้ว่า

$$1 + 2z = 5$$
$$2z = 4$$

เพราะฉะนั้น $z = 2$

แทนค่า $z = 2$ ลงในสมการ ❶ และสมการ ❷ จะได้ระบบสมการใหม่คือ

$x + 2y - 2 = 0$ ----------❺

$$2x + y + 2 = 3 \quad \text{----------}❻$$

คูณสมการ ❺ ด้วย 2 จะได้

$$2x + 4y - 4 = 0 \quad \text{----------}❼$$

นำสมการ ❼ – ❻ จะได้ว่า

$$3y - 6 = -3$$

$$3y = -3 + 6 = 3$$ นั่นคือ $y = 1$ และ $x = 0$

➲ วิธีที่สอง โดยการใช้กฎของเครเมอร์ (ม.5) โดยการเขียนระบบสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ (A) เมทริกซ์ของตัวแปร (X) และเมทริกซ์ของค่าคงที่ (B) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$ จะเห็นว่าสมการนี้อยู่ในรูป $AX = B$

หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ (cofactor) ตามแถวที่สาม

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1)(2 + 1) - (1)(1 + 2) + (2)(1 - 4) \\
&= 3 - 3 - 6 \\
&= -6
\end{aligned}$$

หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่หลักที่ i ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ด้วยหลักของเมทริกซ์ค่าคงที่ ($\det(A_i)$)

$\det(A_1)$ = ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่หลักที่ 1 ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ด้วยหลักของเมทริกซ์ค่าคงที่

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -(3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (5)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(3)(4 + 1) + (5)(2 + 1) \\
&= -(3)(5) + (5)(3) = 0
\end{aligned}$$

$\det(A_2)$ = ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่หลักที่ 2 ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ด้วยหลักของเมทริกซ์ค่าคงที่

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(2+1) - (5)(1+2)$$

$$= (3)(3) - (5)(3) = -6$$

$\det(A_3)$ = ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่หลักที่ 3 ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ด้วยหลักของเมทริกซ์ค่าคงที่

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(1-2) + (5)(1-4)$$

$$= (-3)(-1) + (5)(-3) = -12$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{0}{-6} = 0$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-12}{-6} = 2$$

จะเห็นได้ว่าทั้ง 2 วิธีได้คำตอบเหมือนกัน **ตอบข้อ ค.**

4. จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ปัญหาข้อนี้เป็นทฤษฎีบทหนึ่งของดีเทอร์มิแนนต์ที่กล่าวว่า "ในเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n x n ใดๆ ถ้าสมาชิกในเมทริกซ์นั้นเหมือนกันทุกแถว (หรือหลัก) แล้ว ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นั้นจะเท่ากับศูนย์เสมอ" (บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้สามารถหาอ่านได้จากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นในระดับอุดมศึกษา) **ตอบข้อ ก.**

5. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส, C เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม, D เป็นเมทริกซ์ศูนย์ และ A, B, C, D มีขนาด n x n ข้อใดถูกต้อง (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ตัวเลือก ก. ผิด ความจริงแล้วเมทริกซ์เอกลักษณ์มีดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ 1 เสมอ
ตัวเลือก ข. ผิด เมทริกซ์จัตุรัสไม่จำเป็นต้องมีดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ 0
ตัวเลือก ค. ถูกต้องชัดเจนอยู่แล้ว
ตัวเลือก ง. เมทริกซ์ศูนย์มีดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับศูนย์เสมอ (แสดงว่าหาค่าได้) **ตอบข้อ ค.**

6. จงแก้ระบบสมการ

$w + x + y + z = 12$ ----------❶

$2w - x + y - z = -4$ ----------❷

$w + 2x - y + z = 6$ ----------❸

$w + x - 2y + z = 0$ ----------❹

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้จะใช้กฎของเครเมอร์ซึ่งง่ายกว่า จากระบบสมการที่กำหนดให้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

การหาค่าต่างๆ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3 วิธีที่ 2 นั่นคือ

$$\det(A) = (1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1) - (1)(3) + (1)(3) - (1)(-8) = 9$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (1)\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-4) + (2)(8) + (1)(-12) = -4 + 16 - 12 = 0$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (1)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-4) + (2)(-18) + (1)(50) = 4 - 36 + 50 = 18$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-8) + (1)(-18) + (1)(46) = 8 - 18 + 46 = 36$$

$$\det(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$- (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-12) + (1)(-50) + (2)(46) = 12 - 50 + 92 = 54$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

$$w = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{0}{9} = 0, \quad x = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{18}{9} = 2$$

$$y = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{36}{9} = 4, \quad z = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{54}{9} = 6$$

ตอบข้อ ข.

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ B^{-1}

<u>วิธีทำ</u> จาก $B^{-1} = \dfrac{\text{adj}(B)}{\det(B)}$

เนื่องจาก $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และจะได้ $\det(B) = 0$

นั่นคือ B ไม่มีอินเวอร์ส **ตอบข้อ ง.**

8. ข้อใดถูกต้องเมื่อ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และ $m \neq n$ (ดูข้อมูลและตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ข้อ 1 ถูกต้องเนื่องจากเป็นทฤษฎีบท ในตัวเลือกข้อ 2 และข้อ 3 ผิดเนื่องจากว่าไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส ไม่สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ได้ สำหรับข้อ 4 ก็ผิดอีกเช่นกันเนื่องจากนิยามของเมทริกซ์ผูกผันคือ Transpose of Cofactor ไม่ใช่ Transpose of minor ส่วนข้อ 5 ก็ไม่ถูกต้องเนื่องจากว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัสจึงไม่สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้ **ตอบข้อ ง.**

9. ข้อใดถูกต้องเมื่อ A, B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ข้อ ก. ผิดแน่นอน

ข้อ ข. + ข้อ ค. อาจเป็นจริงภายใต้เงื่อนไขบางอย่างเท่านั้น

ข้อ ง. เป็นจริงตลอดเพราะเป็นทฤษฎีบท **ตอบข้อ ง.**

10. ข้อใดไม่ใช่สมบัติของเมทริกซ์ (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> ข้อ ก. ไม่ใช่สมบัติของเมทริกซ์โดยทั่วไป (แต่ภายใต้เงื่อนไขบางอย่างอาจมีสมบัตินี้ได้)

ข้อ ข., ค. และข้อ ง. เป็นสมบัติของเมทริกซ์ซึ่งคล้ายกับระบบจำนวนจริงและใช้ได้ทั่วไป**ตอบข้อ ก.**

11. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$A + B + C - D = 11$ ----------❶

$2A + B - 3C - D = -8$ ----------❷

$3A - B + C + D = 3$ ----------❸

$4A + 3B - C + D = -10$ ----------❹

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนระบบสมการที่กำหนดให้เป็นสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -72$$

จากกฎของเครเมอร์จะได้ว่า

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 & -1 \\ -8 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-72} = 1, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-72} = -1$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -10 & 1 \end{vmatrix}}{-72} = -5, \quad D = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -10 \end{vmatrix}}{-72} = -6$$

ตอบข้อ ก.

12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x^2 & -2x & 1 \\ -1 & 2x & -x^2 \\ -2x & -x^2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ A ไม่มีอินเวอร์ส

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3 x 3 ฉะนั้นเมื่อ $\det(A) = 0$ จะทำให้ไม่มีอินเวอร์ส

นั่นคือ $\begin{vmatrix} x^2 & -2x & 1 \\ -1 & 2x & -x^2 \\ -2x & -x^2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x^2 & -2x & 1 \\ -1 & 2x & -x^2 \\ -(2x-x^2) & -2x-x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2x-x^2)\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 2x & -x^2 \end{vmatrix} - (-2x-x^2)\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ -1 & -x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2x-x^2)(2x^3-2x)+(2x+x^2)(-x^4+1) = 0$$

$$-(4x^4-2x^5-4x^2+2x^3)+(-2x^5-x^6+2x+x^2) = 0$$

$$-x^6-4x^4+2x^3-3x^2+2x = 0$$

$$x(-x^5-4x^3+2x^2-3x+2) = 0$$

ดังนั้น $x = 0$ ทำให้เมทริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์ส ต่อไปพิจารณา $-x^5-4x^3+2x^2-3x+2 = 0$

นำ -1 คูณตลอดสมการ จะได้ว่า $x^5+4x^3-2x^2+3x-2 = 0$

ดังนั้น $(1+x^2)(x^3+3x-2) = 0$ จะเห็นได้ชัดว่าไม่มีค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มแล้วทำให้สมการเป็นจริง เพราะฉะนั้นคำตอบของสมการนี้จึงมีเพียงจำนวนเดียว คือ 0

จากโจทย์จะได้ว่า 0 เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้เมทริกซ์ที่กำหนดให้ไม่มีอินเวอร์ส **ตอบข้อ ข.**

13. ถ้า $\det(C^TAB^{-1}) = -2$, $\det(A) = -1$, $\det(B) = 3$ จงหาค่าของ $\det(C)$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $\det(C^TAB^{-1}) = -2$

จะได้ $\det(C^T)\cdot\det(A)\cdot\det(B^{-1}) = -2$

$$\det(C)\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = -2$$

เพราะฉะนั้น $\det(C) = \dfrac{-2}{(-1)(\frac{1}{3})} = (2)(3) = 6$ **ตอบข้อ ค.**

14. ถ้า $\det(A) = -\frac{1}{2}$, $\det(B) = -1$ แล้ว $\det(AB)^{-1}$ จะมีค่าเท่าใด

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก

$$\det(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} = \frac{1}{\det(A)\cdot\det(B)} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})\cdot(-1)} = 2$$

ตอบข้อ ข.

15. จงแก้ระบบสมการ

$$2x + y - z = 1$$
$$x - 2y + z = -\frac{1}{2}$$
$$x + y - 2z = -\frac{1}{2}$$

<u>**วิธีทำ**</u> เปลี่ยนระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

โดยการใช้กฎของเครเมอร์ เราจะต้องหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 6$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$

ตอบข้อ ค.

16. ถ้า $A^T = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ แล้ว A^2 คือข้อใดต่อไปนี้

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $A^T = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ จะได้ว่า $A = \left[a_{ji}\right]_{mxn}$

เพราะฉะนั้น $A^2 = \left[a_{ji}^2\right]_{mxn}$

ตอบข้อ ก.

17. กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ขนาด n x n ข้อใดต่อไปนี้ผิด (ดูตัวเลือกจากโจทย์)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาตัวเลือก ก.

จะเห็นว่าถ้า $A = BC$ เราจะได้ทันทีว่า $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$ แต่ไม่จำเป็นว่าถ้า $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$ แล้ว $A = BC$ ผู้เขียนจะพิสูจน์ด้วยการยกตัวอย่างค้านดังนี้

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า

$\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$ แต่ $BC = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq A$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ผิด

ข้อ ข., ค. และข้อ ง. เป็นทฤษฎีบทการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ และการบวกเมทริกซ์ ตามลำดับ **ตอบข้อ ก.**

18. ถ้า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$

<u>วิธีทำ</u> คงจะจำได้ว่าเรามีทฤษฎีบทสำคัญเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ของอินเวอร์สของเมทริกซ์คือ

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$

จาก A^{-1} ที่โจทย์กำหนดให้ สามารถหา $\det(A^{-1})$ ได้ดังนี้

$$\det(A^{-1}) = (-\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) - (-\frac{1}{3})(\frac{1}{3})$$

$$= -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$$

นั่นคือ $\det(A) = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$ **ตอบข้อ ค.**

19. ข้อใดถูกต้องเกี่ยวกับทฤษฎีของดีเทอร์มิแนนต์ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ข้อนี้ต้องอาศัยความเข้าใจและความจำในทฤษฎีของดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งคุณจะพบว่าทุกข้อถูกต้องทั้งหมด สำหรับวิธีพิสูจน์ทั้งหมดสามารถหาอ่านได้จากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นระดับอุดมศึกษา **ตอบข้อ ง.**

20. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $|A^{-1}|$

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ปัญหาข้อนี้ใช้ทฤษฎีของดีเทอร์มิแนนต์คล้ายๆ กับข้อ 18 นั่นคือจะได้ว่า

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

จากโจทย์จะได้ว่า $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตอบข้อ ง.