<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องเมทริกซ์ ตอนที่ 2</u>

1. จงแสดงว่าเมทริกซ์ศูนย์เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีอินเวอร์ส (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> <u>บทนิยามที่เกี่ยวข้อง</u>

1. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrices) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งหมด
2. อินเวอร์สของเมทริกซ์ จะหาค่าได้เมื่อเมทริกซ์นั้นมีดีเทอร์มิแนนต์ไม่เท่ากับศูนย์

เพราะฉะนั้น ถ้าต้องการแสดงว่าเมทริกซ์ศูนย์เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีอินเวอร์สก็ต้องแสดงให้ได้ว่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับศูนย์

สมมติให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ เมื่อต้องการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ (cofactor) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) + \ldots + a_{1n}C_{1n}(A) \\ &= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\det(A) = 0$ นั่นคือเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีอินเวอร์สตามต้องการ **Q.E.D.**

2. กำหนดให้ $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ และ P ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ถ้า P^T เป็นเมทริกซ์ทรานสโพสของเมทริกซ์ P จงแสดงว่า $P = (P^T)^T$ (5 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> โจทย์กำหนดเมทริกซ์ P มาให้ จะได้ว่า $P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $(P^T)^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = P$ **Q.E.D.**

3. จงใช้กฎของเครเมอร์แก้ระบบสมการต่อไปนี้ (10 คะแนน)

$$w - x + y - z = -4$$
$$4w - x + 3y + z = -8$$
$$2w + x + y - z = 0$$
$$3w + 2x + y - 3z = 1$$

<u>วิธีทำ</u> เขียนระบบสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\det(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ว่า $w = \dfrac{8}{-4} = -2, \ x = \dfrac{-12}{-4} = 3, \ y = \dfrac{-4}{-4} = 1, \ z = 0$ **ตอบ**

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์ส

จงแสดงวิธีหา A^{-1} (10 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> จากสูตร $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{21}(A) & C_{31}(A) \\ C_{12}(A) & C_{22}(A) & C_{32}(A) \\ C_{13}(A) & C_{23}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} +(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) & -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) & +(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & +(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ +(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) & -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) & +(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \end{bmatrix}$$ **ตอบ**