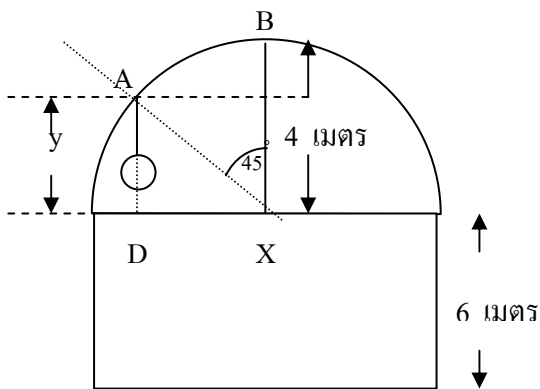


เฉลยแบบทดสอบเรื่องภาคตัดกรวย

ตอนที่ 1

1. ชู่มประตูลักษณะรูปครึ่งวงกลมมีฐานอยู่สูงจากพื้น 6 เมตร ความสูงจากฐานถึงยอด 4 เมตร ที่จุดๆ หนึ่งบนส่วนโค้งของชู่มประตูลักษณะวัตถุด้วยเชือกเบาไว้ 1 ชิ้น อยู่ในตำแหน่งที่ทำมุม 45° กับแนวตั้ง จงหาว่าวัตถุนี้อยู่สูงจากพื้นกี่เมตร (4 คะแนน)

วิธีทำ วาดรูปตามข้อมูลที่ให้มา สมมติให้ y คือความสูงของวัตถุที่วัดจากฐาน



จากรูป จะได้ว่า $\frac{AD}{DX} = \tan 45^\circ$ แสดงว่า $AD = DX = y$

ใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสดังนี้

$$AD^2 + DX^2 = AX^2$$

$$y^2 + y^2 = 4^2 = 16$$

$$y^2 = 8$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

$$\approx 2(1.415) \approx 2.830$$

เพราะฉะนั้นวัตถุอยู่สูงจากพื้นเท่ากับ $2.830 + 6 = 8.830$ เมตร

ตอบ

2. ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งมีดาวเคราะห์ดวงหนึ่งเป็นบริวาร ดาวเคราะห์ดังกล่าวมีคาบไกลสุดของวงโคจรเท่ากับ 12×10^{11} กิโลเมตร คาบของการโคจรใกล้สุดเท่ากับ 5×10^{11} กิโลเมตร จงหาสมการของการโคจรของดาวเคราะห์ดวงนี้ (สมมติดาวฤกษ์มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากและไม่ต้องคิดเทอมของเลขยกกำลังฐานสิบ) (4 คะแนน)

วิธีทำ ก่อนอื่นจะต้องทราบก่อนว่าการโคจรรอบดาวฤกษ์ของดาวเคราะห์ส่วนใหญ่มีลักษณะคล้ายวงรี จึงอนุโลมในการคำนวณเป็นแบบวงรี จากข้อมูลที่กำหนดให้จะได้ว่าระยะครึ่งแกนเอกมีค่าเท่ากับ 6 นั่นคือ $a^2 = 36$ และระยะครึ่งแกนโทเท่ากับ 2.5 นั่นคือ $b^2 = 6.25$

ดังนั้นสมการวงรีที่ใช้อธิบายการโคจรของดาวเคราะห์ดวงนี้คือ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{6.25} = 1$ **ตอบ**

3. จงหาสมการของวงรีซึ่งมีแกนเอกยาวเท่ากับแกนตามขวาง แกนโทยาวเท่ากับแกนสังยุค และจุดศูนย์กลางร่วมกันของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ (4 คะแนน)

วิธีทำ ก่อนอื่นพยายามจัดรูปของสมการไฮเพอร์โบลาใหม่ จะได้ว่า

$$(9x^2 - 36x) - (16y^2 + 32y) - 124 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) - 124 - 36 + 16 = 0$$

$$9(x - 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$$

นำ 144 หารตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \text{ ----- ①}$$

สมการ ① เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(2, -1)$

แกนตามขวางยาวเท่ากับ 8 หน่วย และแกนสังยุคยาวเท่ากับ 6 หน่วย

เพราะฉะนั้นสมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

$$9(x - 2)^2 + 16(y + 1)^2 = 144$$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 144$$

$$9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 32y + 16 - 144 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$$

ตอบ

4. จงหาจุดตัดแกน X ของกราฟ $x^2 - y^2 = x - y$ (4 คะแนน)

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 - y^2 = x - y$

$$(x - y)(x + y) = x - y$$

ดังนั้น $(x + y) = 1$

ซึ่งเป็นสมการของกราฟเส้นตรง มีจุดตัดแกน X ที่จุด $(1, 0)$

ตอบ

5. ไฮเพอร์โบลา $xy = -2$ ตัดกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 4$ ที่จุดใดบ้าง (4 คะแนน)

วิธีทำ จากสมการ $xy = -2$ จะได้ว่า $y = -\frac{2}{x}$ นำไปแทนค่าในสมการวงกลมจะได้

$$x^2 + \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 4$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

แทนค่า $x = \sqrt{2}$ และ $x = -\sqrt{2}$ ในสมการวงกลม จะได้

$$2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 2$$

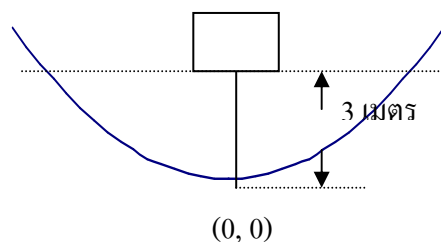
$$y = \pm\sqrt{2}$$

ได้คู่อันดับ $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ แต่จากการตรวจสอบจะพบว่า มีเพียงคู่อันดับ $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ และ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ที่ทำให้ระบบสมการดังกล่าวเป็นจริง เพราะฉะนั้น ไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ตัดกราฟของสมการวงกลมทั้งหมด 2 จุดดังนี้
 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ตอบ

6. จานดาวเทียมรูปโกลังพาราโบลามีตัวสะท้อนสัญญาณซึ่งอยู่สูงจากจุดวกกลับของจานเท่ากับ 3 เมตร จงหาความกว้างของจานดาวเทียมที่จุดซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกับตัวสะท้อนสัญญาณ (สมมติว่าจานดาวเทียมมีจุดยอดที่จุด $(0, 0)$) (4 คะแนน)

วิธีทำ วาดรูปคร่าวๆ ได้ดังนี้



สมการของพาราโบลานี้คือ $12y = x^2$ และมีโฟกัสที่จุด $(0, 3)$ ความกว้างของจานดาวเทียมที่จุดซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกับตัวสะท้อนสัญญาณ คือ ลาดัสเรกตัมของพาราโบลานี้ซึ่งมีความยาว $4|c|$

$$= 4(|3|) = 12 \text{ เมตร}$$

ตอบ

7. จงหาพื้นที่ของวงรีซึ่งมีจุด $F_1(-1, 4)$ และจุด $F_2(5, 4)$ เป็นจุดโฟกัส และมีแกนเอกยาว 8 หน่วย (6 คะแนน)

วิธีทำ สังเกตว่าเส้นตรง $F_1 F_2$ อยู่ในแนวที่ขนานกับแกน X แสดงว่าแกนเอกของวงรีต้องขนานกับแกน X

$$\text{จาก} \quad h + c = 5 \quad \text{-----} \text{①}$$

$$\text{และ} \quad h - c = -1 \quad \text{-----} \text{②}$$

$$\text{นำ} \text{①} + \text{②} \quad 2h = 4$$

$$h = 2$$

$$c = 5 - 2 = 3$$

$$\text{จากความสัมพันธ์} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= (4 - 3)(4 + 3)$$

$$= 7$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad b = \sqrt{7}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{พื้นที่ของวงรีที่ต้องการคือ} \quad \pi ab = 4\pi\sqrt{7}$$

ตอบ

8. วงกลม $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 12y + 36 = 0$ และวงกลม $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$

1) จงหาระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง (5 คะแนน)

2) ถ้าลากเส้นตรง L_1 จากจุดศูนย์กลางของ C_1 ลงไปตัดและตั้งฉากกับแกน X ที่จุด P และลากเส้นตรง L_2 จากจุดศูนย์กลางของ C_2 ลงไปตัดและตั้งฉากกับแกน X ที่จุด Q จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม PC_1C_2Q

(15 คะแนน)

วิธีทำ ก่อนอื่นจะต้องจัดรูปสมการของวงกลมทั้งสองใหม่เพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้

$$x^2 + y^2 + 2x - 12y + 36 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 12y + 36) - 1 - 36 + 36 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{วงกลม } C_1 \text{ มีสมการคือ } (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 9 + 14 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{วงกลม } C_2 \text{ มีสมการคือ } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$1) \text{ ระยะระหว่างจุดสองจุด} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (6 - 3)^2}$$

$$= 5 \text{ หน่วย}$$

ตอบ

- 2) เนื่องจากโจทย์บอกว่าลากเส้นตรงให้ตัดและตั้งฉากกับแกน X นั่นคือค่าพิกัด x ย่อมไม่เปลี่ยนแปลง สรุปลงได้ว่าจุด P และจุด Q ที่เราต้องการก็คือ P(-1, 0) และ Q(3, 0) เมื่อลากเส้นต่อจุดตามที่โจทย์กำหนดจะได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\begin{aligned}\text{สูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู} &= \frac{1}{2} \times \text{ความสูง} \times (\text{ผลบวกของความยาวด้านคู่ขนาน}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{(-1-3)^2 + (0)^2}) \times (\sqrt{(-1+1)^2 + (6-0)^2} + \sqrt{(3-3)^2 + (3-0)^2}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (6+3) \\ &= 2 \times 9 \\ &= 18 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ตอบ