เฉลยแบบทดสอบเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1

1. วงกลม C มีจุดศูนย์กลางที่ C(2, 3) ณ จุด (3, 4) ซึ่งอยู่บนวงกลมมีเส้นตรง L สัมผัสพอดี จงหาสมการของเส้นสัมผัส L (4 คะแนน)

วิธีทำ ขั้นตอนแรก จะเห็นว่าโจทย์กำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลม C และจุดบนวงกลม C มาให้ สิ่งที่ทำได้ตอนแรกก็คือการหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง (ซึ่งในที่นี้ก็คือรัศมี)

จากความสัมพันธ์ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ถ้าให้ C เป็นจุดที่ 1 และจุดบนวงกลมเป็นจุดที่ 2 จะได้ว่า

$$m = \frac{4-3}{3-2} = 1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นรัศมีของวงกลม C เท่ากับ 1

ต่อไปจะหาความชันของเส้นตรง L เนื่องจากเส้นตรง L สัมผัสวงกลม C พอดี จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมในชั้น ม.3 จะได้ว่าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ – 1

จะเห็นว่าเราได้ความชันของเส้นตรง L แล้ว ต่อไปก็จะหาสมการของเส้นตรง L จากข้อมูลที่มีอยู่ คือ ความชันของเส้นตรง L และจุดที่อยู่บนเส้นตรง L ซึ่งเห็นได้ชัดว่าคือจุด (3, 4)

เพราะฉะนั้น จากสมการมาตรฐานของเส้นตรง

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

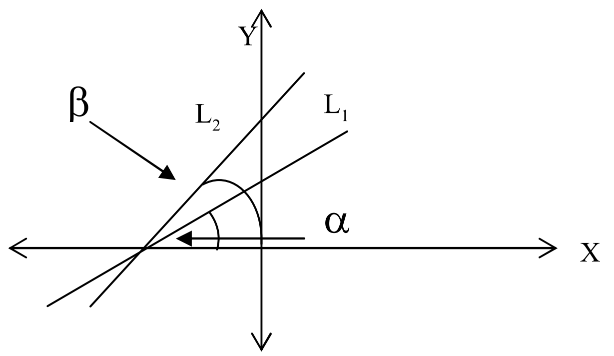
$$y - 4 = (1)(x - 3)$$

$$y = x + 1$$

ตอบ

2. จงหามุมที่เกิดจากการที่เส้นตรง $L_1 : x - 2y + 2 = 0$, $L_2 : x - y + 2 = 0$ (4 คะแนน)

วิธีทำ วาดกราฟคร่าวๆ ของเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ลงบนแกนพิกัดฉาก ได้ดังนี้



กำหนดให้ α แทนขนาดของมุมที่เส้นตรง L_1 ทำกับแกน X และให้ β แทนขนาดของมุมที่เส้นตรง L_2 ทำกับแกน X

พิจารณาเส้นตรง L_1

โดยการหาจุดตัดแกน X และแกน Y จะได้ว่าจุดตัดแกน X คือ $X_1(-2, 0)$

และจุดตัดแกน Y คือ $Y_1(0, 1)$ จะได้ว่าความชันของเส้นตรง L_1 คือ $m_1 = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ (ขอให้ท่านลองคิดดูว่าทำไม??)

พิจารณาเส้นตรง L_2 ในทำนองเดียวกับเส้นตรง L_1 ก็จะได้ว่า $m_2 = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$

นั่นคือ $\tan\beta = 1$ (ขอให้ท่านลองคิดดูว่าทำไม??)

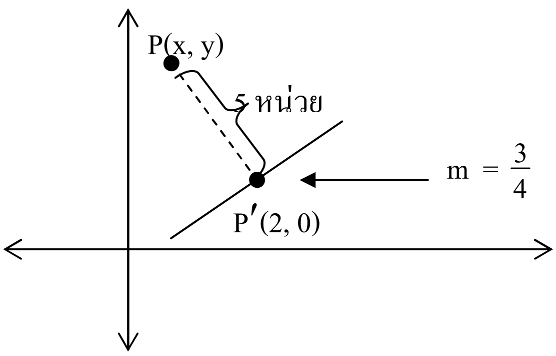
พิจารณาจากกราฟอีกครั้ง จะพบว่าขนาดของมุมที่ต้องการคือ $\beta - \alpha$

จาก
$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+(1)(\frac{1}{2})}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้นมุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงสองเส้นดังกล่าวเท่ากับ $\arctan(\frac{1}{3})$ **ตอบ**

3. จุด $P(x, y)$ อยู่ห่างจากเส้นตรง L ซึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{3}{4}$ เป็นระยะทาง 5 หน่วย เมื่อลากเส้นสมมติ M จากจุด P ให้ตั้งฉากกับเส้นตรง L จุดที่เส้นสมมติ M ตัดกับเส้นตรง L มีพิกัด (2, 0) จงหาพิกัดของจุด P

วิธีทำ



พยายามวาดกราฟคร่าวๆ จะได้ดังรูปด้านบน

โดยใช้ความรู้ 2 เรื่อง คือ ระยะระหว่างจุดสองจุด กับเรื่องการแก้ระบบสมการก็จะสามารถแก้ปัญหาข้อนี้ได้อย่างง่ายดายดังนี้

จากสมการ
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$5 = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$(x-2)^2 + y^2 = 25 \quad \text{----------} ❶$$

จากสมการเรื่องความชัน

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{จะได้ว่า}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{y-0}{x-2} = \frac{y}{x-2}$$

$$y = -\frac{4}{3}(x-2) \text{ ----------- ❷}$$

จากนั้นแทนค่า y จากสมการ ❷ ลงในสมการ ❶ จะได้ว่า

$$(x-2)^2 + [-\frac{4}{3}(x-2)]^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \frac{16}{9}(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x - 2 = 3 \text{ หรือ } x - 2 = -3$$

จะได้ $x = 5$ หรือ $x = -1$

แทนค่า $x = 5$ ลงในสมการ ❷ จะได้ว่า $y = -\frac{4}{3}(5-2) = -4$

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ P(5, – 4)

แทนค่า $x = -1$ ลงในสมการ ❷ จะได้ว่า $y = -\frac{4}{3}(-1-2) = 4$

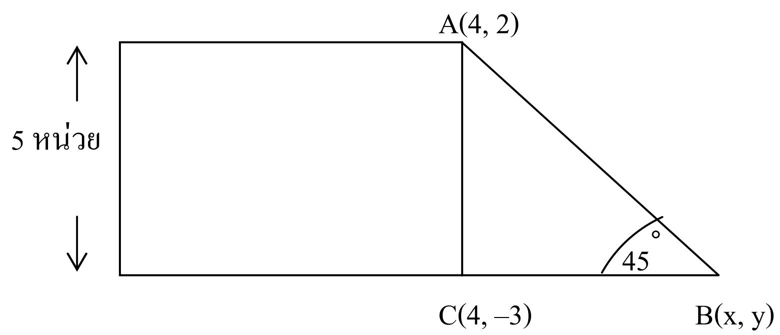
ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ P(– 1, 4)

แต่! คำตอบที่เป็นไปได้มีเพียงคำตอบเดียวคือ P(– 1, 4) ตอบ

*** ให้ท่านลองคิดดูว่าทำไม P(5, – 4) จึงเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้

4. สี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่งซึ่งมีระยะระหว่างด้านคู่ขนานเท่ากับ 5 หน่วย มีด้านที่ไม่ตั้งฉากกับด้านคู่ขนานเอียงทำมุม 45 องศากับแนวระดับ ถ้าจุดปลายของด้านดังกล่าวนี้คือ A(4, 2) และ B(x, y) จงหาค่าของ $x^2 + y^2$ (6 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u> วาดรูปตามข้อมูลที่โจทย์ให้มาและกำหนดจุด C ได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า $AC = CB = 5$ เนื่องจาก $\frac{AC}{CB} = \tan 45^{\circ} = 1$

นั่นคือ $4 - x = 5$ จะได้ $x = 9$ และ $y = -3$

(ตรงนี้ขอให้ลองคิดดูด้วยว่าทำไม $y = -3$)

เพราะฉะนั้นค่าของ $x^2 + y^2 = 9^2 + (-3)^2 = 81 + 9 = 90$ **ตอบ**

5. จุด $A(3, 4)$ อยู่ห่างจากเส้นตรง L ซึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{5}{12}$ เท่ากับ $4\frac{5}{13}$ หน่วย จงหาสมการของเส้นตรง L (7 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> โจทย์ปัญหาข้อนี้ให้นึกถึงสูตรเรื่องระยะระหว่างเส้นตรงกับจุด ดังนี้

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

แทนค่าตามข้อมูลที่โจทย์ให้มาก็จะได้ว่า

$$5 = \frac{|A(3) + B(4) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{----------} ❶$$

จะเห็นว่ายังติดตัวแปรมากถึง 3 ตัว เราจึงไม่สามารถหาค่าตัวแปรแต่ละตัวได้ เราจะใช้วิธีลดตัวแปรลงเรื่อยๆ โดยการแทนค่าบางอย่างลงไป ในที่นี้โจทย์กำหนดให้ $m = -\frac{5}{12}$

เนื่องจาก $m = -\frac{A}{B}$ ตามสมการทั่วไปของสมการเส้นตรงคือ $Ax + By + C = 0$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $A = 5,\ B = 12$ แทนค่า A, B ลงในสมการ ❶ จะได้

$$5 = \frac{|(5)(3) + (12)(4) + C|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$65 = |15 + 48 + C| = |63 + C|$$

ดังนั้น $63 + C = 65$ หรือ $63 + C = -65$

จะได้ $C = 2$ หรือ $C = -128$

เพราะฉะนั้น เส้นตรง L ที่ต้องการคือ $5x + 12y + 2 = 0$ และ $5x + 12y - 128 = 0$ **ตอบ**

6. เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ ถ้า L_1 มีความชันเท่ากับ 2 จงหาสมการของเส้นตรงทั้งสองเส้นพร้อมทั้งจุดตัดแกนในระบบพิกัดฉากของกราฟแต่ละอัน (8 คะแนน)

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจากเส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันเป็นมุมฉาก ซึ่ง L_1 มีความชันเท่ากับ 2 เพราะฉะนั้น L_2 จึงมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง L_1 คือ

$$y - \frac{8}{5} = (2)(x - \frac{4}{5})$$

$$y = 2x - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} = 2x$$

ในทำนองเดียวกัน สมการของเส้นตรง L_2 คือ

$$y - \frac{8}{5} = (-\frac{1}{2})(x - \frac{4}{5})$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{2}{5}$$

เพราะฉะนั้น L_2: $y = -\frac{x}{2} + 2$ **ตอบ**

ต่อไปจะหาจุดตัดแกนของกราฟของสมการที่หาได้

จาก L_1: $y = 2x$ เมื่อให้ $x = 0$ จะได้จุดตัดแกน Y คือ $Y_1(0, 0)$ และในทำนองเดียวกันจะได้จุดตัดแกน X คือ $X_1(0, 0)$

จาก L_2: $y = -\frac{x}{2} + 2$ เมื่อให้ $y = 0$ จะได้จุดตัดแกน X คือ $X_2(0, 4)$ และในทำนองเดียวกันก็จะได้ว่าจุดตัดแกน Y คือ $(0, 2)$ **ตอบ**

<u>เฉลยแบบทดสอบเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 2</u>

1. จงแสดงว่าผลคูณระหว่างความชันของเส้นตรงเส้นหนึ่งกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงนั้นมีค่าเท่ากับ -1

<u>วิธีทำที่ 1</u>

สมมติว่าเส้นตรง L มีสมการคือ $Ax + By + C = 0$ ความชันของเส้นตรงนี้เท่ากับ $-\frac{A}{B}$

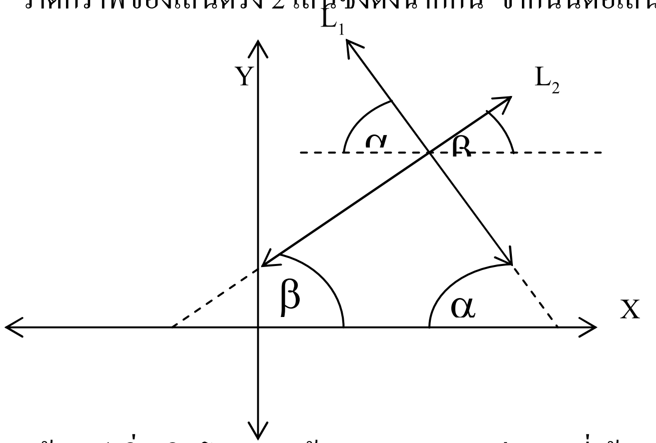
และเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง L มีสมการคือ $-Bx + Ay + C$ หรือ $Bx - Ay + C$

ความชันของเส้นตรงนี้เท่ากับ $-(-\frac{B}{A}) = \frac{B}{A}$

เพราะฉะนั้นผลคูณความชันเท่ากับ $(-\frac{A}{B})(\frac{B}{A}) = -1$ **ตอบ**

<u>วิธีทำที่ 2</u>

วาดกราฟของเส้นตรง 2 เส้นซึ่งตั้งฉากกัน จากนั้นต่อเส้นตรงทั้งสองให้ตัดแกน X จะได้ดังรูป



สร้างรูปเพิ่มเติมโดยลากเส้นขนานแกน X ผ่านจุดที่เส้นตรงสองเส้นตัดกัน

สมมติให้มุม α และมุม β เป็นมุมที่เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ทำกับแกน X ตามลำดับ และ m_1 m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ จะได้

$m_1 = -\tan\alpha$ และ $m_2 = \tan\beta$ จะเห็นว่า m_1 เป็นค่าลบเนื่องจากการวัดมุมในทางเรขาคณิตวิเคราะห์นิยมให้การวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวกเสมอ

จาก $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ จะได้ว่า $\tan\alpha = -m_1 = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cot\beta = \frac{1}{m_2}$

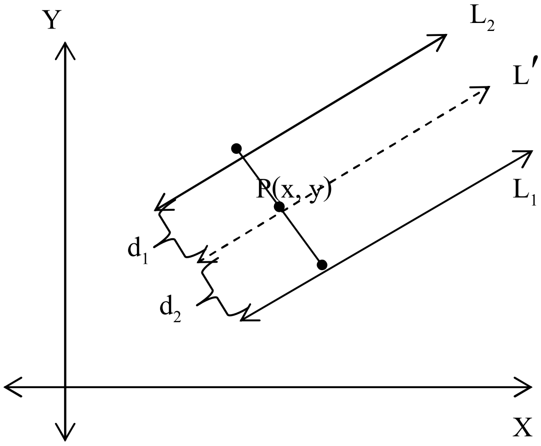
นั่นคือ $-m_1 = \frac{1}{m_2}$ จะได้ว่า $m_1m_2 = -1$ **ตอบ**

2. จงแสดงว่าระยะระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ขนานกัน (d) เป็นไปตามสมการ $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ

วิธีทำ เนื่องจากสมการเส้นตรงมีรูปทั่วๆไป คือ $Ax + By + C = 0$ และเส้นตรงที่ขนานกันคือเส้นตรงที่มีความชันเท่ากัน แตกต่างกันที่ค่าคงที่ C ดังนั้น ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะสมมติให้เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 มีสมการคือ $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$ ตามลำดับ

ต่อไปสมมติให้จุด P(x, y) อยู่บนเส้นตรง L' ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นตรง L_1 กับเส้นตรง L_2 โดยมีระยะระหว่างเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 เท่ากับ d_1 และ d_2 ตามลำดับ $d = d_1 + d_2$ และ $d_1 = d_2$



เนื่องจาก $d_1 = d_2$ จะได้ว่า

$$\frac{|Ax + By + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax + By + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|Ax + By + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{|Ax + By + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|Ax + By + C_1| - |Ax + By + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|(Ax + By + C_1) - (Ax + By + C_2)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ตอบ
