



วิชา คณิตศาสตร์ 2 (ม.4)



โดย อ.บัณฑิตย์ ฝอยทอง
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

เซต (Sets)

เซต

เซต เป็นคำที่ไม่ได้ให้นิยาม (Undefined Term) เรามักใช้เซตแทนสิ่งที่อยู่ร่วมกัน ซึ่งหมายถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ ที่เราสามารถกำหนดสมาชิกได้ชัดเจน (Well - defined)

การเขียนเซต

1. เขียนแบบแจกแจงสมาชิก (Tabular form) เป็นการเขียนเซตโดยบรรจุสมาชิกทั้งหมดของเซตลงในวงเล็บปีกกา และระหว่างสมาชิกแต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,)

(หมายเหตุ : ถ้าเซตมีจำนวนสมาชิกมากมาย เราใช้ "..." แทนสมาชิกที่เหลือ)

2. เขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต (Set builder form)

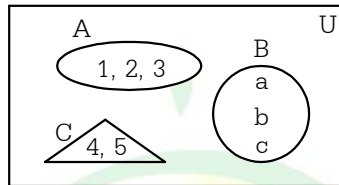
มีหลักการ คือ แทนสมาชิกของเซตด้วยตัวแปรแล้วกำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรนั้น เพื่อแสดงว่ามีสิ่งใดบ้างที่เป็นสมาชิกของเซต

วิธีเขียนเซตโดยวิธีนี้ คือ เขียนตัวแปรและสิ่งที่กำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรลงในวงเล็บปีกกาและคั่นตัวแปรกับสิ่งที่กำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรด้วยเครื่องหมาย " | " หรือ " : "

3. การเขียนเซตด้วยวิธีอื่นๆ เช่น แบบบรรยาย, แบบใช้แผนภาพเวนน, แบบช่วง เป็นต้น



แผนภาพเวรน์-ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่ใช้เขียนแทนเซต ซึ่งแทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า และแทนเซต A, B, \dots ด้วยรูปวงกลม หรือวงรี หรือรูปปิดอื่นๆ ดังรูป



รูปวงรี	แทนเซต A	โดยที่	$A = \{1, 2, 3\}$
รูปวงกลม	แทนเซต B	โดยที่	$B = \{a, b, c\}$
รูปสามเหลี่ยม	แทนเซต C	โดยที่	$C = \{4, 5\}$

ซึ่งในเรื่องของแผนภาพนี้เราจึงทำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องการกระทำระหว่างเซต ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพจะทำให้ดูเข้าใจง่ายขึ้น

เซตที่ควรรู้จัก

- เซตจำกัด (Finite Set) หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด (มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์)
- เซตอนันต์ (Infinite Set) หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด และเป็นเซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด
- เซตว่าง (Empty Set) หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกและเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ϕ หรือ $\{ \}$ เซตว่างถือว่าเป็นเซตจำกัดและเป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0
- เซตที่เท่ากัน เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $A = B$ " หรืออาจกล่าวได้ว่าเซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
- เซตเทียบเท่า เซตสองเซตใดๆ จะเทียบเท่ากัน ก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน แต่สมาชิกไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน หรือจะเหมือนกันก็ได้เขียนแทนด้วย $A \sim B$
- เซตที่ไม่เท่ากัน เซต A ไม่เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกของเซต A อย่างน้อย 1 ตัว ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B หรือมีสมาชิกของเซต B อย่างน้อย 1 ตัว ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \neq B$

สับเซต (Subset) และเพาเวอร์เซต (Power Set)

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ จะได้ว่า

- เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อทุกสมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย " $A \subset B$ "
- เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $A \not\subset B$ "
- เซต A เป็นสับเซตแท้ (Proper Subset) ของเซต B ก็ต่อเมื่อ A เป็นสับเซตของ B แต่ $A \neq B$ และใช้สัญลักษณ์ " \subset " แทนทั้งสับเซตแท้และสับเซตไม่แท้
- เพาเวอร์เซต (Power Set) ของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $P(A)$ " ดังนั้น $P(A) = \{x \mid x \subset A\}$



สมบัติของสับเซต

1. ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้ว $A \subset A$ [เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง]
2. ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้ว $\phi \subset A$ [เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต]
3. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
4. ถ้า A เป็นเซตจำกัดใดๆ ที่มีสมาชิก n ตัว แล้ว สรุปได้ว่า
 - 4.1 จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต $A = 2^n$ เซต
 - 4.2 จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต $A = 2^n - 1$ เซต
 - 4.3 จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว $= 2^n - 1$ เซต
 - 4.4 จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว $= 2^n - n - 1$
 - 4.5 จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกเพียง 2 ตัว $= \frac{n(n-1)}{2}$ เซต
 - 4.6 จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกเพียง r ตัว $= C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ เซต

สมบัติของเพาเวอร์เซต

ให้ A เป็นเซตใดๆ เพาเวอร์เซตของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$ และมีสมบัติดังนี้

1. $P(A) \neq \phi$ สำหรับทุกๆ เซต A [$P(A)$ จะต้องมีส่วนอย่างน้อย 1 ตัว เสมอ]
2. $\phi \in P(A)$ และ $\phi \subset P(A)$ สำหรับทุกๆ เซต A
3. $A \in P(A)$ เสมอ
4. ถ้า A เป็นเซตใดๆ ที่มีสมาชิก n ตัว จำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^n$ เซต
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
7. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
8. ถ้า A เป็นเซตอนันต์แล้ว $P(A)$ เป็นเซตอนันต์

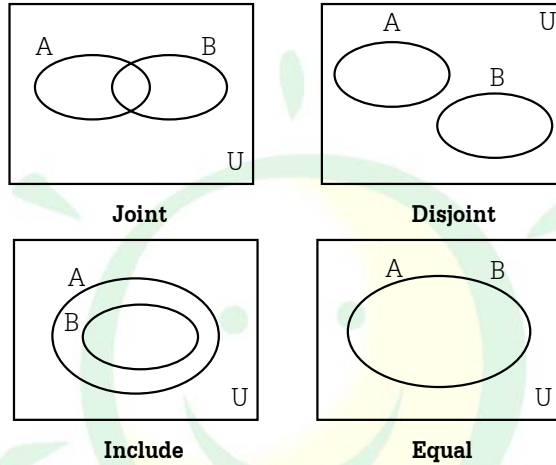
ข้อสังเกต

1. $A \subset (A \cup B)$ และ $B \subset (A \cup B)$
2. $(A \cap B) \subset A$ และ $(A \cap B) \subset B$
3. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$



การดำเนินการบนเซต (Operation on set)

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งกำหนดดังแผนภาพต่อไปนี้

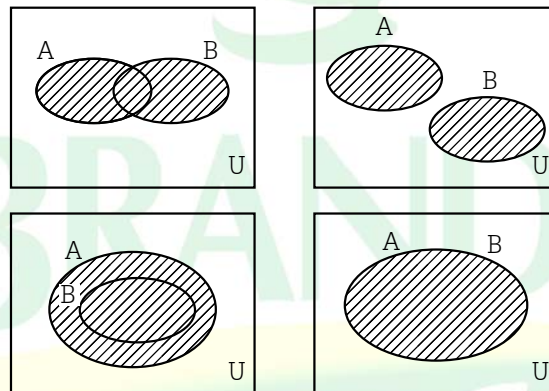


1. ยูเนียน (Union)

ยูเนียนของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A หรือของเซต B หรือของทั้งสองเซต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $A \cup B$ "

ดังนั้น $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B \text{ หรือ } x \in A \text{ และ } B\}$

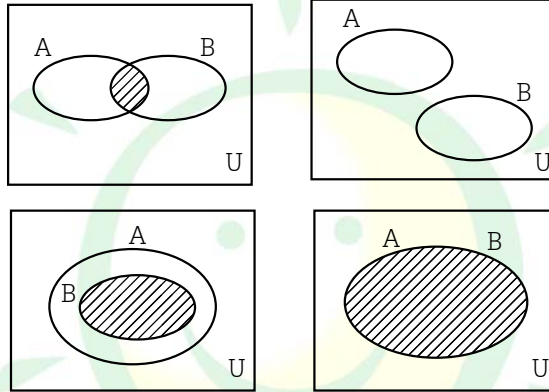
บริเวณที่แรเงาในแผนภาพ คือ $A \cup B$



2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

อินเตอร์เซกชันของ A และ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $A \cap B$ "

$$\text{ดังนั้น } A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$



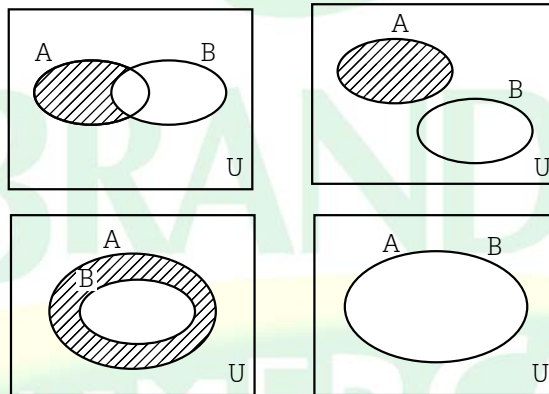
บริเวณที่แรเงาในแผนภาพ คือ $A \cap B$

3. ผลต่าง (Difference)

ผลต่างระหว่างเซต A และ เซต B หรือคอมพลีเมนต์ของ B เมื่อเทียบกับ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $A - B$ "

$$\text{ดังนั้น } A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

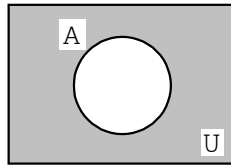
บริเวณที่แรเงาในแผนภาพ คือ $A - B$



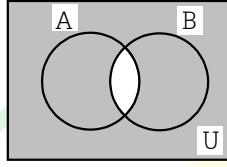
4. คอมพลีเมนต์ (Complement)

คอมพลีเมนต์ของเซต A เมื่อเทียบกับ U เขียนแทนด้วย A' หรือ $U - A$ หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A

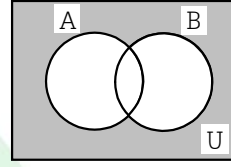
$$\text{ดังนั้น } A = \{x \in U | x \notin A\}$$



A'



$(A \cap B)'$



$(A \cup B)'$

กฎทางพีชคณิตของเซต (Laws of the Algebra of Sets)

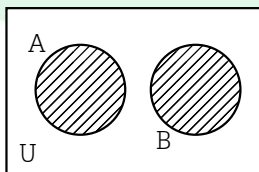
ให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ

กฎทางพีชคณิตของเซต	Union	Intersection
1. Idempotent Laws	$A \cup A = A$ $A \cup \phi = A$ $A \cup U = U$	$A \cap A = A$ $A \cap \phi = \phi$ $A \cap U = A$
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (Associative Laws)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. กฎการสลับที่ (Commutative Laws)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
4. กฎการกระจาย (Distributive Laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. กฎเอกลักษณ์ (Identity Laws)	$A \cup \phi = A$	$A \cap U = A$
6. Complement Laws	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \phi$
7. De Morgan's Laws	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

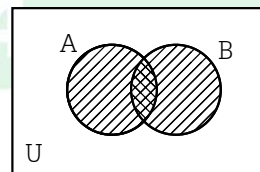
การหาจำนวนสมาชิกของเซต

กำหนดให้ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ A, B และ C เป็นเซตจำกัด ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของเอกภาพสัมพัทธ์ U

- ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด และ $A \cap B = \phi$ แล้ว $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดใดๆ และ $A \cap B \neq \phi$ แล้ว $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- ถ้า A, B และ C เป็นเซตจำกัดใดๆ และ $A \cap B \cap C \neq 0$ แล้ว
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
 ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว ถ้า $A \cap B \neq \phi$ แล้ว



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



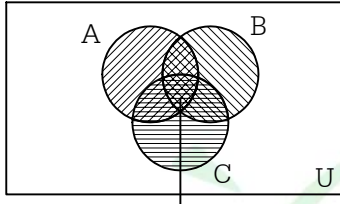
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



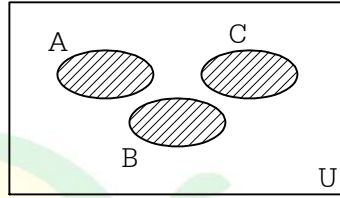
4. ถ้า A, B และ C เป็นเซตจำกัดใดๆ แล้ว

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

พิจารณาดังรูป

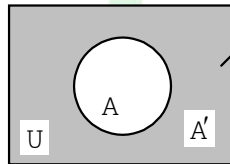


$$(A \cap B \cap C)$$



$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

5. ถ้า A เป็นเซตจำกัดใดๆ แล้ว $n(A') = n(U) - n(A)$ ดังรูป



บริเวณที่แรเงาคือจำนวนสมาชิกของเซตของ $n(A')$

แนวข้อสอบ

1. ข้อใดถูกต้อง

- 1) $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \{\text{จำนวนจริง}\}$
- 2) ถ้า $A \subset B$ แล้ว เซต A มีจำนวนสมาชิกน้อยกว่าเซต B
- 3) ถ้า A เป็นเซตจำกัดใดๆ แล้ว จะมีเซต A ที่ทำให้ $n(P(A)) = 15$
- 4) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $n(P(P(A))) = 256$ แล้ว $n(A) = 3$

2. กำหนด $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ เมื่อ a, b เป็นสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- 1) $\langle a, b \rangle \cap \langle b, a \rangle = \{a, b\}$
- 2) $\langle a, b \rangle \cap \{a\} \neq \emptyset$
- 3) $\langle a, b \rangle \cap \{\{a\}\} = \{\{a\}\}$
- 4) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

3. ถ้า $A \cup B$ มีจำนวนสมาชิก 7 ตัว และ $A \cap B$ มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว ถ้า A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จงหาว่า $A - B$ มีสมาชิกกี่ตัว

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

4. กำหนด I_m คือ เซตคำตอบของจำนวนนับ m ตัวแรก กล่าวคือ $I_m = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- 1) $(I_1 \cup I_4) \cap I_5 \neq I_4 \cap I_5$
- 2) $(I_{99} - I_{100}) \cup A = A$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ
- 3) $P(I_{10} - I_7)$ มีจำนวนสมาชิก 8 ตัว
- 4) $n(I_3 - I_5) \neq n(I_3) - n(I_5)$

5. เซต E ในข้อใดต่อไปนี้เป็นเซตที่แต่ละสมาชิกของ E ล้วนแต่เป็นสับเซตของ E

- 1) $E = \{\text{เซตของจำนวนจริง}\}$
- 2) $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$
- 3) $E = \{0, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$
- 4) $E = \{\{1, 2, 3, \dots\}, \{2, 3, 4, \dots\}, \{3, 4, 5, \dots\}, \dots\}$



20. ในการแข่งขันบาสเกตบอลแห่งเอเชียครั้งหนึ่ง ปรากฏว่ามีประเทศที่เข้าร่วมการแข่งขันครั้งนั้น 8 ประเทศ คือ ไทย จีน เกาหลีใต้ มาเลเซีย ศรีลังกา ฟิลิปปินส์ สิงคโปร์ และอินโดนีเซีย ในนัดเปิดสนามมีการแข่งขัน 4 คู่ หนังสือพิมพ์ 3 ฉบับ ให้การวิจารณ์ว่าก่อนการแข่งขัน ดังนี้
- หนังสือพิมพ์ไทยรัฐ วิจารณ์ว่า ทีมที่จะชนะในนัดแรก คือ ไทย เกาหลีใต้ มาเลเซีย และจีน
 หนังสือพิมพ์เดลินิวส์ วิจารณ์ว่า ทีมที่จะชนะในนัดแรก คือ เกาหลีใต้ จีน ศรีลังกา และสิงคโปร์
 หนังสือพิมพ์บ้านเมือง วิจารณ์ว่า ทีมที่จะชนะในนัดแรก คือ มาเลเซีย สิงคโปร์ อินโดนีเซีย และจีน
 จงหาว่าการแข่งขันนัดแรกนี้ จะมีการจับคู่การแข่งขันกันอย่างไร

ประเทศ \ หนังสือพิมพ์	ไทย	จีน	เกาหลีใต้	มาเลเซีย	ศรีลังกา	ฟิลิปปินส์	สิงคโปร์	อินโดนีเซีย
ไทยรัฐ								
เดลินิวส์								
บ้านเมือง								

- 1) ไทยแข่งกับจีน เกาหลีใต้แข่งกับสิงคโปร์ มาเลเซียแข่งกับศรีลังกา อินโดนีเซียแข่งกับฟิลิปปินส์
- 2) จีนแข่งกับฟิลิปปินส์ ไทยแข่งกับศรีลังกา เกาหลีใต้แข่งกับอินโดนีเซีย มาเลเซียแข่งกับสิงคโปร์
- 3) จีนแข่งกับฟิลิปปินส์ ไทยแข่งกับสิงคโปร์ ศรีลังกาแข่งกับมาเลเซีย เกาหลีใต้แข่งกับอินโดนีเซีย
- 4) ไทยแข่งกับอินโดนีเซีย มาเลเซียแข่งกับสิงคโปร์ เกาหลีใต้แข่งกับศรีลังกา จีนแข่งกับฟิลิปปินส์

เฉลย

1. 4) 2. 3) 3. 2) 4. 1) 5. 2) 6. 3) 7. 1) 8. 1) 9. 2) 10. 3)
 11. 1) 12. 1) 13. 1) 14. 1) 15. 1) 16. 2) 17. 3) 18. 4) 19. 1) 20. 3)

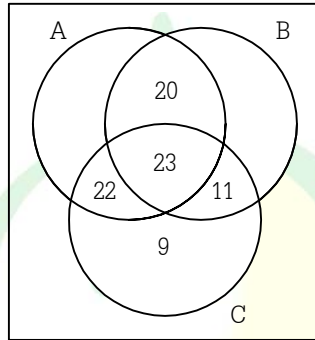
แนวข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

1. ให้ A, B, C เป็นช่วงซึ่ง $A = [2, 6], B = [3, 7], C = [4, 9]$ และเอกภพสัมพัทธ์ $U = [2, 10]$ แล้ว $[(A - C)' - B]$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้
 1) $(7, 10]$ 2) $(9, 10]$ 3) $[2, 3) \cup (7, 10]$ 4) $[2, 3) \cup (9, 10]$
2. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \leq 1\}$ และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| > 7\}$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก
 1) $A = (0, \infty)$ 2) $B' = (-5, 9)$ 3) $A - B' = (9, \infty)$ 4) $B' - A = (-5, -1)$



เก็งข้อสอบเรื่องเซต

8. สำหรับเซต x ใดๆ ให้ $|x|$ แทนจำนวนสมาชิกของ x ให้ A, B, C เป็นเซตซึ่ง $|A \cup B \cup C| = 100$ และกำหนดสมบัติดังแผนภาพ



- ถ้า $|A| - |B| = 6$ แล้ว $|(B \cup C) - A|$ มีค่าเท่าใด
- 1) 28 2) 29 3) 30 4) 31
9. ถ้า $A = \{\emptyset, 0, 1, \{0\}, \{0, 1\}\}$ และ $P(A)$ เป็นเพาเวอร์เซตของเซต A แล้ว $|P(A) - A|$ มีสมาชิกกี่ตัว
- 1) 28 2) 29 3) 30 4) 31
10. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต x คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ และเซต $y = \{1, \{2\}\}$ แล้ว $x \cap y$ คือข้อใดต่อไปนี้
- 1) \emptyset 2) $\{1\}$ 3) $\{2\}$ 4) $\{1, 2\}$
11. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซต $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ A, B, C เป็นเซตจำกัดซึ่งมีเงื่อนไขว่า $n(A) = n(B) = n(C) = 3$ และ $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C) = 2$
ถ้า $A \cup B \cup C = U$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด
- 1) $n(A \cup B) = 4$ 2) $n(A \cup (B \cap C)) = 3$
3) $n(A \cap (B \cup C)) = 2$ 4) $n(A \cap B \cap C) = 1$
12. ในการสอบแข่งขันชิงทุนการศึกษาของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีผู้เข้าสอบแข่งขัน 100 คน ผู้เข้าสอบต้องสอบ 2 วิชา คือ คณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ โดยมหาวิทยาลัยกำหนดไว้ว่าผู้ที่จะได้รับทุนต้องสอบผ่านทั้ง 2 วิชา ซึ่งปรากฏผลว่าผู้ที่สอบตกวิชาคณิตศาสตร์มี 60 คน สอบตกวิชาภาษาอังกฤษมี 46 คน และสอบตกทั้ง 2 วิชา มี 10 คน ดังนั้นผู้มีสิทธิ์รับทุนมีกี่คน
- 1) 2 2) 4 3) 5 4) 10
13. ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นสับเซตของ U
กำหนดนิยาม $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$
ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ และ $C = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ แล้ว $(A \star B) \star C$ เท่ากับเซตในข้อใด
- 1) $\{4, 5, 6\}$ 2) $\{5, 6, 7\}$ 3) $\{1, 4, 5, 6\}$ 4) $\{1, 5, 6, 7\}$
14. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5\}$ และ $C = \{S \mid S \subset A \text{ และ } S \cap B \neq \emptyset\}$ ดังนั้นจำนวนสมาชิกทั้งหมดของเซต C เท่ากับเท่าใด
- 1) 16 2) 24 3) 48 4) 63



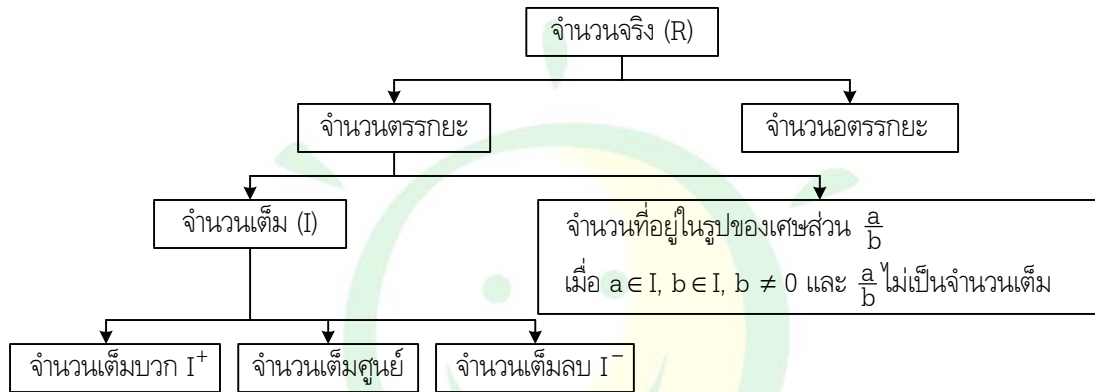
15. หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีครอบครัวทั้งหมด 800 ครอบครัว ประกอบอาชีพค้าขายอย่างเดียว 10 ครอบครัว นอกนั้นทำสวนเงาะ มังคุด และทุเรียน จากการสำรวจเฉพาะชาวสวน พบว่ามีครอบครัวที่ปลูกผลไม้ตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไป 110 ครอบครัว ปลูกเงาะและมังคุด 70 ครอบครัว ปลูกเงาะและทุเรียน 60 ครอบครัว ปลูกมังคุดและทุเรียน 50 ครอบครัว ไม่ปลูกมังคุดเลย 290 ครอบครัว จงหาว่ามีกี่ครอบครัวที่ปลูกแต่มังคุดเพียงอย่างเดียวเท่านั้น
1) 315 2) 350 3) 405 4) 415
16. กำหนด U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A, B, C เป็นเซตใดๆ โดยที่ $n(U) = 44, n(A) = 16, n(B) = 19, n(C) = 16, n(A \cap B) = 7, n(B \cap C) = 6, n(A \cap C) = 5$ และ $n[(A \cup B \cup C)'] = 9, n[(A \cup B) - C]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
17. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ถ้าต้องการสร้างเซต C โดยที่ $(A - B) \subset C$ และ $C \subset (A \cup B)$ แล้ว จะได้จำนวนเซต C ดังกล่าวทั้งหมดเท่ากับกี่เซต
18. ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด ซึ่งกำหนดโดย
 $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A \cap C = \{0, 1\}$
 $B \cap C = \{0, 1, 5\}$
 $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$
เซตของ $(B \cup C) - A$ มีค่าตรงกับเซตใด
19. จากการสำรวจการประกอบอาชีพการทำนา ทำไร่ และทำสวน ของชาวบ้านหมู่บ้านหนึ่ง ซึ่งมีอยู่ 100 ครอบครัว ปรากฏว่ามี 41 ครอบครัวไม่ได้ประกอบอาชีพทั้งสามอาชีพนี้ มี 10 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพทั้งสามอาชีพ และมี 32 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพอย่างน้อยสองอย่างในสามอาชีพนี้ จำนวนครอบครัวที่ประกอบอาชีพเพียงอย่างเดียวในสามอาชีพนี้มีจำนวนกี่คน
20. จากการสำรวจผู้ชมการถ่ายทอดการแข่งขันกีฬาเอเชียนเกมส์ประเภทฟุตบอล บาสเกตบอล และวอลเลย์บอล จำนวน 200 คน พบว่าผู้ที่ชอบดูฟุตบอลมี 130 คน ผู้ที่ชอบดูบาสเกตบอลมี 100 คน ผู้ที่ชอบดูวอลเลย์บอลมี 110 คน ผู้ที่ชอบดูฟุตบอลและบาสเกตบอลมี 60 คน ผู้ที่ชอบดูบาสเกตบอลและวอลเลย์บอลมี 55 คน ผู้ที่ชอบดูฟุตบอลและวอลเลย์บอลมี 45 คน จำนวนผู้ที่ชอบดูกีฬาทั้งสามประเภทเท่ากับกี่คน

เฉลย

1. 1) 2. 3) 3. 4) 4. 2) 5. 3) 6. 3) 7. 2) 8. 3) 9. 2) 10. 1)
11. 4) 12. 2) 13. 4) 14. 3) 15. 4) 16. 19 17. 16 18. {4, 5} 19. 27 20. 80



ระบบจำนวนจริง



1. ลักษณะโครงสร้างของระบบจำนวนจริงจากแผนภาพ

ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ว่าแขนงใด ตัวเลขเป็นองค์ประกอบหนึ่งในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์แขนงนั้นๆ เสมอ ดังนั้นสิ่งที่เราต้องศึกษาคือความเข้าใจเกี่ยวกับตัวเลข เซตของตัวเลขที่สำคัญๆ ได้แก่

1.1 เซตของจำนวนเต็ม นิยมใช้ I แทนสัญลักษณ์ของเซตดังกล่าว ประกอบด้วย

1) เซตของจำนวนนับ หรือเซตของจำนวนธรรมชาติ หรือเซตของจำนวนเต็มบวก คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $1, 2, 3, 4, \dots$ และเรานิยมใช้สัญลักษณ์ N หรือ I^+ แทนเซตดังกล่าว นั่นคือ $N = I^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

2) เซตของจำนวนเต็มลบ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $-1, -2, -3, -4, \dots$ และเรานิยมใช้สัญลักษณ์ I^- แทนเซตดังกล่าว นั่นคือ $I^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

3) เซตของศูนย์ คือ เซตที่มี 0 เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียว นั่นคือ $\{0\}$

1.2 เซตของเศษส่วนที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ได้แก่ เซตที่มีสมาชิกเป็นเศษส่วน โดยมีเงื่อนไขว่าเศษต้องเป็นจำนวนเต็ม ส่วนต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ และไม่สามารถตัดทอนให้เหลือส่วนเป็น 1 ได้ ไม่สามารถเขียนเป็นจำนวนเต็มได้ ซึ่งตัวอย่างของสมาชิกในเซตนี้ ได้แก่ $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{7}{8}, \frac{4}{5}, -\frac{7}{8}, -\frac{4}{5}$ เป็นต้น

1.3 เซตของจำนวนตรรกยะ ได้แก่ เซตของจำนวนที่สามารถทำเป็นเศษส่วนได้ นิยมใช้ Q แทนสัญลักษณ์ของเซตดังกล่าว ดังนั้น $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in I, q \in I \text{ และ } q \neq 0 \right\}$

1.4 เซตของจำนวนอตรรกยะ ได้แก่ เซตของจำนวนที่เขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ ตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, 0.1537\dots$

1.5 เซตของจำนวนจริง คือ เซตที่เกิดจากการยูเนียนกันของเซตของจำนวนตรรกยะกับเซตของจำนวนอตรรกยะ จากลักษณะของเซตของจำนวนต่างๆ สามารถแสดงเป็นโครงสร้างได้ดังนี้



สรุปเซตที่ควรทราบเพิ่มเติม

1. เซตของจำนวนคู่

จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่มี 2 เป็นตัวประกอบ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าคือจำนวนเต็มที่หารลงตัว ดังนั้นถ้าให้ E เป็นเซตของจำนวนคู่ $E = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$ และสามารถเขียนเซต E ในลักษณะเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้ $E = \{2n \mid n \in I\}$

2. เซตของจำนวนคี่

จำนวนคี่ คือ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มคู่ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า จำนวนคี่คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 แล้วเหลือเศษ 1

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ ถ้าให้ } O \text{ เป็นเซตของจำนวนคี่} \quad O &= I - E \\ &= \{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \} \\ &= \{2n - 1 \mid n \in I\} \\ \text{หรือ} \quad O &= \{2n + 1 \mid n \in I\} \end{aligned}$$

3. เซตของจำนวนเฉพาะบวก

จำนวนเฉพาะบวก คือ จำนวนเต็มบวกที่ไม่ใช่ 1 และไม่ใช่จำนวนเต็มอื่น ซึ่งจำนวนใดหารลงตัว นอกจาก 1 และตัวของมันเอง จำนวนเหล่านี้ ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 เป็นต้น

4. เซตของจำนวนเฉพาะ

จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 1 หรือ -1 ซึ่งไม่มีจำนวนใดหารลงตัวนอกจาก 1, -1 และตัวมันเอง กับจำนวนตรงข้ามเท่านั้นที่หารลงตัว เช่น $-3, -2, 2, 3, 5$ เป็นต้น

2. คุณสมบัติพื้นฐานของการบวกและการคูณของจำนวนจริง

A_1 คุณสมบัติปิด (Closure property)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b$ และ ab เป็นจำนวนจริง

A_2 คุณสมบัติการสลับที่ (Commutative property)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b = b + a$ และ $ab = ba$

A_3 คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ (Associative property)

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$ และ $(ab)c = a(bc)$

A_4 คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวกและการคูณ

- จะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง คือ 0 ซึ่ง $a + 0 = 0 + a = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงใดๆ เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์ของการบวก
- จะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง คือ 1 ซึ่ง $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงใดๆ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์ของการคูณ



A₅ คุณสมบัติการมีอินเวอร์ส (Existence of inverse)

- ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่งทำให้ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ และเรียก $-a$ ว่าเป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ a
- ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง a^{-1} ที่ทำให้ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ และเรียก a^{-1} ว่าเป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณของ a

3. อสมการ

การแก้อสมการ มีขั้นตอนวิธีดังนี้

1. จัดอสมการให้อยู่ในรูปของการแยกตัวประกอบให้เป็นแต่ละวงเล็บคูณกัน โดยค่าทางด้านขวามือเท่ากับศูนย์
2. จัดตัวประกอบแต่ละวงเล็บให้ตัวแปรอยู่หน้า ค่าคงที่อยู่หลัง หรือสลับง่ายๆ ให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นจำนวนบวก
3. หาค่าตัวแปรจากแต่ละวงเล็บที่ทำให้เท่ากับศูนย์ ค่าที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต
4. นำค่าที่ได้จากข้อ 3 มาเขียนลงบนเส้นจำนวนซึ่งทำให้เส้นจำนวนถูกแบ่งเป็นช่วงๆ
5. ในแต่ละช่วงเขียนเครื่องหมายสลับกันตามลำดับ โดยทางด้านขวามือสุดเป็นจำนวนบวก ถัดมาเป็นลบสลับกันไป

6. พิจารณาคำตอบดังนี้

6.1 ถ้าอสมการอยู่ในรูปที่มากกว่าศูนย์ เซตคำตอบจะต้องหมายถึง ช่วงที่เป็นบวกในแต่ละช่วง โดยการนำมาเขียนเนี่ยกัน

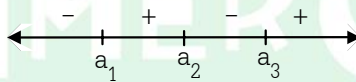
6.2 ถ้าอสมการอยู่ในรูปที่น้อยกว่าศูนย์ เซตคำตอบจะต้องหมายถึง ช่วงที่เป็นลบในแต่ละช่วง แล้วนำมาเขียนเนี่ยกัน

ข้อควรระวังในเรื่องการแก้อสมการ

1. การคูณหรือหารด้วยจำนวนลบ จะต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เป็นตรงข้ามกับเครื่องหมายเดิม
2. ในกรณีที่ต้องการทำให้หมดไปโดยการเอา ค.ร.น. คูณตลอด จะต้องแน่ใจก่อนว่าตัวที่นำไปคูณตลอดนั้นเป็นจำนวนบวกหรือลบ แต่ในกรณีที่ไม่แน่ใจก็ให้นำมายกกำลังสองก่อน แล้วจึงนำไปคูณตลอด และไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายของอสมการ

ตัวอย่าง จงหาคำตอบจากอสมการ $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) > 0$; $[a_1 < a_2 < a_3]$

แนวคิด นำมาเขียนบนเส้นจำนวนได้ ดังรูป

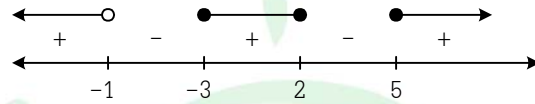


เซตคำตอบ คือ $\{x \in \mathbb{R} \mid a_1 < x < a_2 \text{ หรือ } x > a_3\}$ เมื่อ $a_1 < a_2 < a_3$



ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบจากอสมการ $\frac{(x-5)(x+3)(x-2)}{(x+1)} \geq 0$

แนวคิด พิจารณาจากอสมการ $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$ และค่า x แต่ละค่าที่ทำให้แต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 คือ $x = -1, -3, 2, 5$ ซึ่งนำไปเขียนบนเส้นจำนวนแล้วแบ่งช่วงพร้อมทั้งใส่เครื่องหมายบวกลบสลับกัน แล้วพิจารณาช่วงที่เป็นบวก



ดังนั้นเซตคำตอบ คือ $(-\infty, -1) \cup [-3, 2] \cup [5, \infty)$

การแก้อสมการและสมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์ (รากที่สอง) มีขั้นตอนดังนี้

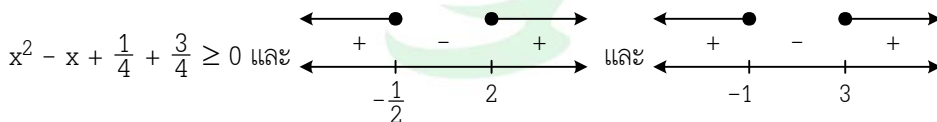
1. หาเอกพจน์พีชคณิตก่อน
2. ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง เพื่อให้เครื่องหมายกรณฑ์หมดไปโดยพิจารณาดังนี้ ถ้า $0 \leq a \leq b$ แล้ว $a^2 \leq b^2$
3. ใช้การพิจารณาโดยแบ่งเป็นกรณี
4. นำคำตอบที่ได้จากการแก้อสมการและอสมการไปตรวจสอบในสมการเดิม

ตัวอย่าง ผลบวกของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นคำตอบของอสมการ $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ มีค่าเท่าใด

แนวคิด $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ และ $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ และ $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$$2x^2 - 3x - 2 \geq x^2 - 2x - 3 \text{ และ } (2x + 1)(x - 2) \geq 0 \text{ และ } (x - 3)(x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - x + 1 \geq 0 \text{ และ } (2x + 1)(x - 2) \geq 0 \text{ และ } (x - 3)(x + 1) \geq 0$$



$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ และ } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty) \text{ และ } (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

$$x \in \mathbb{R}$$



$$\mathbb{R} \cap (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

จำนวนเต็มที่ไม่เป็นคำตอบ คือ 0, 1, 2

ผลบวกของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นคำตอบของอสมการ คือ $0 + 1 + 2 = 3$



4. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

4.1 นิยาม เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ กำหนดดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases} \quad \text{หรือ} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$$

4.2 ข้อควรสนใจเพิ่มเติม

1. $|x| > x$ ก็ต่อเมื่อ $x < 0$
2. $|x| > -x$ ก็ต่อเมื่อ $x > 0$

4.3 คุณสมบัติที่ควรทราบ

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

1. $|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$
2. $|x| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$
3. $|x| > a$ หมายถึง $x > a$ หรือ $x < -a$
4. $|x| \geq a$ หมายถึง $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

4.4 กฎเกณฑ์ที่ควรทราบ

1. สมการ

1. $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4. $|x^2| = |y^2|$ ก็ต่อเมื่อ $|x| = |y|$
5. $|xy| = |x||y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$
7. $|x + y| = |x| + |y|$ ก็ต่อเมื่อ $xy \geq 0$
8. $|x - y| = |x| + |y|$ ก็ต่อเมื่อ $xy \leq 0$
9. $\sqrt{x^2} = |x|$

2. อสมการ

1. $x^2 < y^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| < |y|$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$
3. $|x| - |y| \leq |x - y|$
4. $|y| - |x| \leq |x - y|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$



แนวข้อสอบ

1. ข้อความใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**
 - 1) ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว ab เป็นจำนวนอตรรกยะ
 - 2) ถ้า $a \neq 0$ เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว ab เป็นจำนวนตรรกยะ
 - 3) มีจำนวนอตรรกยะ a, b ซึ่ง $a \neq -b$ และ $a + b$ เป็นจำนวนตรรกยะ
 - 4) ถ้า a, b เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว a^b เป็นจำนวนตรรกยะ
2. ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**
 - 1) ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\frac{a^n}{a^n} = 1$
 - 2) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > b$ แล้ว $|a - b| = |a| - |b|$
 - 3) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a^2 + b^2 > (a + b)^2$ แล้ว $ab < 0$
 - 4) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ แล้ว $ac < bc$ หรือ $ac > bc$
3. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าเรียงติดกันจากน้อยไปมาก ถ้า y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยสุดที่ทำให้ $\sqrt[3]{x + y + z}$ เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว y มีค่าเท่าใด
 - 1) 7
 - 2) 8
 - 3) 9
 - 4) 10
4. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก ค่าของ $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับเท่าใด
 - 1) 3
 - 2) 4
 - 3) 5
 - 4) 6
5. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n = \frac{4}{4^n}$
 ค่าของ $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n)$ มีค่าตรงกับข้อใด
 - 1) $[0, 1]$
 - 2) $(1, 2)$
 - 3) $[2, \infty)$
 - 4) $(-\infty, \infty)$
6. ข้อความใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**
 - 1) อินเวอร์สการบวกของ $\frac{xy-1}{x}$ คือ $\frac{1}{x} - y$
 - 2) อินเวอร์สการคูณของ $-3 - \sqrt{2}$ คือ $\frac{\sqrt{2}-3}{7}$
 - 3) ถ้า $x, y \in \mathbb{R}$ และ $x * y = \frac{3x+2y}{9}$ แล้ว $7 * 3 = 3$
 - 4) ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ และ $a \Delta b = a^b$ แล้วเอกลักษณ์ของระบบคือ 1
7. อินเวอร์สการคูณของ $(1 + \sqrt{3})^2$ มีลักษณะอย่างไร
 - 1) เป็นจำนวนตรรกยะที่มากกว่า 0.15
 - 2) เป็นจำนวนตรรกยะที่น้อยกว่า -1
 - 3) เป็นจำนวนอตรรกยะบวกที่น้อยกว่า 0.2
 - 4) เป็นจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง 0.2 และ 0.5
8. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 4 ตำแหน่ง ทารด้วย 72 ลงตัว ตัวเลขหลักร้อยและหลักสิบ คือ 5 และ 7 ตามลำดับ ถ้า a เป็นตัวเลขหลักพัน และ b เป็นตัวเลขหลักหน่วย แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด
 - 1) 11
 - 2) 13
 - 3) 15
 - 4) 17



17. ให้ R คือ เซตของจำนวนจริง เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^4}{x^2-1} \geq x^2 + 1$ คือข้อใดต่อไปนี้
- 1) R 2) $R - \{-1, 1\}$ 3) $(-1, 1)$ 4) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
18. กำหนดให้ $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} = 1.732$ ค่าของ $7a^2 + 11ab - 7b^2$ เท่ากับเท่าใด
(คำตอบให้ใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)
19. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$ ข. ถ้า $a|b$ แล้ว ห.ร.ม. ของ a กับ b คือ a
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
20. ถ้า $[a, b]$ เป็นคำตอบของอสมการ $\sqrt{x+7} \geq |x-5|$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่าใด
- 1) 9 2) 11 3) 17 4) 19
21. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า 5 ทหาร m เหลือเศษ 4 และ 5 ทหาร n เหลือเศษ 2 แล้ว 5 ทหาร $(m+n)$ เหลือเศษเท่าใด
- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
22. ผลบวกกำลังสองของจำนวนเต็มลบ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ $|(x^2 + 2x - 15) + (2x - 3)| = |x^2 + 2x - 15| + |2x - 3|$ มีค่าเท่าใด
- 1) 15 2) 20 3) 55 4) 225
23. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{|x-1|-2}{|x-2|-4} < 1$ คือข้อใด
- 1) $(-6, 2)$ 2) $(-6, -2)$ 3) $(-2, 6)$ 4) $(2, 6)$
24. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $\frac{a^n}{a^n} = 1$
- 2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $a^2 > a$
- 3) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a^2 + b^2 > (a+b)^2$ แล้ว $ab < 0$
- 4) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ แล้ว $ac < bc$ หรือ $ac > bc$
25. เซตคำตอบของอสมการ $\left| \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-1}{x-4} \right| \geq \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + \left| \frac{x-1}{x-4} \right|$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 3) 2. 4) 3. 2) 4. 1) 5. 2) 6. 21 7. 1) 8. 1) 9. 2) 10. 4)
11. 3) 12. 3) 13. 3) 14. 1) 15. 1) 16. 4) 17. 2) 18. 107.99 19. 1)
20. 2) 21. 1) 22. 3) 23. 3) 24. 3) 25. $(-\infty, -3) \cup [1, 2] \cup (4, \infty)$



ความสัมพันธ์-ฟังก์ชัน

1. คู่อันดับ (Ordered Pair)

คือ การจับคู่กันระหว่างของ 2 สิ่ง คู่อันดับแต่ละคู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือ สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง โดยทั่วไปนิยมแทนเป็นคู่อันดับ (a, b) หรือ (x, y) เมื่อ a และ x เป็นสมาชิกตัวหน้า ส่วน b และ y เป็นสมาชิกตัวหลัง

การเท่ากันของคู่อันดับ และการไม่เท่ากันของคู่อันดับ

นิยาม $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

$(a, b) \neq (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $x, y \in \mathbb{R}$ ถ้า $(3x - y, 2x + y) = (y + 4, x - 7)$ แล้วคู่อันดับ $(x, \frac{2y}{x})$ เท่ากับคู่อันดับใด

ตอบ $(10, 5)$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $(4x - 1, y) = (3y - 2, x - 2)$ แล้ว $(x + y, x - y)$ มีค่าตรงกับคู่อันดับใด

ตอบ $(-16, 2)$

2. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งหมายถึงเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ หรือหมายถึงเซตว่าง ถ้าเซต A หรือเซต B เซตใดเซตหนึ่งเป็นเซตว่างหรือทั้งสองเซตเป็นเซตว่าง

นั่นคือ สามารถนิยามได้ดังนี้ $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$

$B \times A = \{(x, y) | x \in B \text{ และ } y \in A\}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 6\}$

จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว แล้ว $A \times B$ จะมีสมาชิก mn ตัว ซึ่งเท่ากับสมาชิกของ $B \times A$
2. ถ้า $A = \phi$ หรือ $B = \phi$ จะได้ว่า $A \times B = B \times A = \phi$
3. $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$
4. $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
5. ถ้า $A \times B = A \times C$ แล้ว B ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ C
6. ถ้า $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \phi$ แล้ว $B = C$
7. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
8. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
9. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$



3. ความสัมพันธ์ (Relations)

ในทางคณิตศาสตร์ เรานำสิ่งของ 2 สิ่งที่เกี่ยวข้องกันมาเขียนเป็นคู่อันดับโดยบ่งบอกกฎเกณฑ์ หรือลักษณะที่เกี่ยวข้องไว้ เช่น 10 มากกว่า 2 จะเขียนเป็นคู่อันดับ (10, 2) โดยกฎเกณฑ์ที่สิ่ง 2 สิ่ง เกี่ยวข้องกัน คือ "มากกว่า" ก เป็นน้องชาย ข จะเขียนเป็นคู่อันดับ (ก, ข) โดยกฎเกณฑ์ที่สิ่ง 2 สิ่ง เกี่ยวข้องกัน คือ "เป็นน้องชาย" เราสามารถนิยามความสัมพันธ์ได้ดังนี้

นิยาม ให้ A และ B เป็นเซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ตัวอย่าง

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$$
$$r_1 = \{(1, 2), (3, 10)\}$$
$$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$$
$$r_2 = \{(3, 2)\}$$
$$r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt[3]{x}\}$$
$$r_3 = \emptyset$$

ข้อสังเกต

1. \emptyset เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะ \emptyset เป็นสับเซตของ $A \times B$
2. สมาชิกของความสัมพันธ์เป็นคู่อันดับ ยกเว้นความสัมพันธ์ที่เป็นเซตว่างจะไม่มีคู่อันดับ
3. ความสัมพันธ์ในเซต A หมายถึง ความสัมพันธ์ที่เป็นสับเซตของ $A \times A$
4. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว $A \times B$ จะมีสมาชิก mn ตัว ดังนั้นสับเซตของ $A \times B$ จะมี 2^{mn} สับเซต แต่ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ นั่นคือ จะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่ต่างกัน 2^{mn} ความสัมพันธ์

4. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r และเขียนด้วยสัญลักษณ์ D_r โดยที่ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r และเขียนด้วยสัญลักษณ์ R_r โดยที่ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

1. ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปเซตของคู่อันดับ โดยเขียนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิก มีหลักในการพิจารณา ค่าโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

D_r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับ ซึ่งอยู่ในความสัมพันธ์ r

R_r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับ ซึ่งอยู่ในความสัมพันธ์ r



2. ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปสมการ จะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูปของ $y = f(x)$ แล้วพิจารณาค่า x ค่า x ใดๆ ที่ทำให้สมการหรือความสัมพันธ์เป็นจริงตามเงื่อนไขที่กำหนด ก็คือ ค่าของโดเมนของความสัมพันธ์ r ที่ต้องการ และค่า x ใดๆ ที่ทำให้สมการหรือความสัมพันธ์ไม่เป็นจริงก็คือค่า x ที่ต้องยกเว้น ซึ่งค่า x ที่ต้องยกเว้นมีหลักการในการพิจารณา ดังนี้

- 2.1 ค่า x ที่แทนค่าแล้วทำให้ส่วนเป็นศูนย์
- 2.2 ค่า x ที่แทนค่าแล้วทำให้จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายราก หรือกรณีที่ เป็นเลขคู่เป็นค่าติดลบ
- 2.3 ค่า x ที่ไม่สอดคล้องกับสมการ หรือข้อกำหนด

การหาค่า R_r จะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูปของ $x = f(y)$ แล้วพิจารณาค่า y แต่ต้องคำนึงถึงค่า y จากสมการเดิมด้วย

3. ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปกราฟ มีหลักการในการพิจารณาค่าโดเมน คือ Project จุดต่างๆ ของกราฟลงบนแกน x ถ้าจะพิจารณาค่าเรนจ์ ก็ให้ Project จุดต่างๆ ของกราฟลงบนแกน y

การทำ D_r และ R_r นอกจากจะมีหลักเกณฑ์ทั่วไปดังที่กล่าวแล้ว ยังมีหลักเกณฑ์ย่อยๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวโจทย์อีกมากมายหลายหลักเกณฑ์ ซึ่งนักเรียนควรจะได้หาประสบการณ์เพิ่มเติมโดยการทำโจทย์ให้มากขึ้น จะขอยกตัวอย่างหลักเกณฑ์บางหลักเกณฑ์ เช่น

1) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูปเศษส่วน ใช้หลักเกณฑ์ว่า ส่วน $\neq 0$

ตัวอย่าง
$$r = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{2}{x^2 - 4} \right\}$$

จะเห็นว่า y จะหาได้เมื่อ $x^2 - 4 \neq 0$

$$x \neq \pm 2$$

ดังนั้น $D_r = R - \{-2, 2\}$

หาค่าเรนจ์พิจารณาดังนี้

$$x^2 - 4 = \frac{2}{y}$$

$$x^2 = 4 + \frac{2}{y}$$

$$x^2 = \frac{4y + 2}{y}$$

$$x^2 \geq 0 \text{ เสมอ}$$

ดังนั้น $\frac{4y + 2}{y} \geq 0$

$$\frac{2y + 1}{y} \geq 0$$

$$y \leq -\frac{1}{2} \text{ หรือ } y > 0$$

$$R_r = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup (0, \infty)$$



2) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูป $r = \{(x, y) \mid y = \frac{ax + b}{cx + d}\}$

จะได้ว่า $D_r = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$$R_r = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$= R - \left\{\frac{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x \text{ ในเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x \text{ ในส่วน}}\right\}$$

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = \frac{3x - 5}{2x - 7}\}$

จะได้ว่า $D_r = R - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

$$R_r = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

3) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูป (จำนวนจริงใดๆ)² ใช้หลักเกณฑ์ว่า (จำนวนจริงใดๆ)² ≥ 0 เสมอ

ตัวอย่าง $r = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 = y - 3\}$

จากสมการจะได้ว่า x เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น $D_r = R$

จาก $(x - 1)^2 = y - 3$

แต่ $(x - 1)^2 \geq 0$

ดังนั้น $y - 3 \geq 0$

$$y \geq 3$$

นั่นคือ $R_r = [3, \infty)$

4) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใดๆ ใช้หลักเกณฑ์ว่า

|จำนวนจริงใดๆ| ≥ 0 เสมอ

ตัวอย่าง $r = \{(x, y) \mid y + 5 = |2x - 1|\}$

จาก $y + 5 = |2x - 1|$

$$|2x - 1| \geq 0 \text{ จะได้ } D_r = R$$

ดังนั้น $y + 5 \geq 0$

$$y \geq -5$$

นั่นคือ $R_r = [-5, \infty)$

$$D_r = R$$

$$R_r = [-5, \infty)$$



- 5) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูปรากคู่ของจำนวนจริงใดๆ ใช้หลักเกณฑ์ว่า รากคู่ของจำนวนจริงใดๆ จะหาค่าได้เมื่อจำนวนจริงตัวนั้นต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

ตัวอย่าง $r = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$

y จะหาได้เมื่อ $x^2 - 1 \geq 0$

$(x - 1)(x + 1) \geq 0$

ดังนั้น $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

นั่นคือ $D_r = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

พิจารณาค่าเรนจ์ $y^2 = x^2 - 1, y \geq 0$

$x^2 = y^2 + 1$

$y \in \mathbb{R}$ แต่ $y \geq 0$

$R_r = [0, \infty)$

- 6) ถ้าเงื่อนไขของสมการความสัมพันธ์ไม่สามารถจัด y ในรูป x หรือจัด x ในรูป y ได้ ให้ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือจัดให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$

ตัวอย่าง $r = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \right\}$

หา D_r โดยใช้หลักเกณฑ์ว่า ส่วน $\neq 0$

$x^2 - 2x - 3 \neq 0$

$(x - 3)(x + 1) \neq 0$

$x \neq 3, -1$

ดังนั้น $D_r = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

การหาค่าเรนจ์จะต้องจัด x ในเทอม y ซึ่งการจัดสามารถจัดโดยวิธีทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จาก $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

$x^2 - 2x - 3 = \frac{1}{y}$

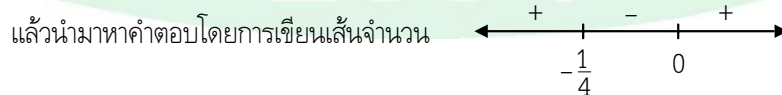
$x^2 - 2x + 1 - 3 = \frac{1}{y} + 1$

$(x - 1)^2 = \frac{1}{y} + 1 + 3$

$(x - 1)^2 = \frac{1 + 4y}{y}$

แต่ $(x - 1)^2 \geq 0$ เสมอ

ดังนั้น $\frac{1 + 4y}{y} \geq 0$



ดังนั้น จะได้ $R_r = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup (0, \infty)$

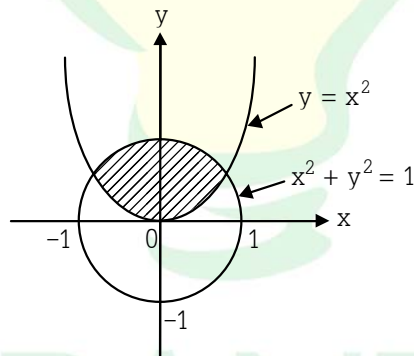


5. กราฟของความสัมพันธ์

กราฟมี 3 ชนิด คือ

1. กราฟจุด
2. กราฟเส้น เป็นกราฟที่เงื่อนไขของความสัมพันธ์เป็นเครื่องหมาย = และ $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3. กราฟพื้นที่ เป็นกราฟที่เงื่อนไขของความสัมพันธ์เป็นเครื่องหมาย $<, \leq, >, \geq$ การวาดกราฟแบบนี้มีวิธีการ คือ
 - 1) ก่อนที่จะเขียนกราฟของอสมการ จะต้องเขียนกราฟของสมการก่อน
 - 2) ถ้ามีเครื่องหมาย " = " ในอสมการ ส่วนที่เป็นกราฟของสมการจะเป็นเส้นทึบ แต่ถ้าไม่มีเครื่องหมาย " = " ในอสมการ ส่วนที่เป็นกราฟของสมการจะเป็นเส้นประ
 - 3) ถ้าเงื่อนไขของกราฟความสัมพันธ์เป็นเครื่องหมาย $>$ ก็ให้แรเงาเหนือเส้นกราฟของสมการ จะได้พื้นที่ของกราฟอสมการที่ต้องการ
 - 4) ถ้าเงื่อนไขของกราฟความสัมพันธ์เป็นเครื่องหมาย $<$ ก็ให้แรเงาใต้เส้นกราฟของสมการ จะได้พื้นที่ของกราฟอสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของ $y \geq x^2$ และ $x^2 + y^2 \leq 1$



6. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วอินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} และจะได้ว่า r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A นั่นคือ จะได้ว่า

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x \in B \text{ และ } y \in A\}$$

ข้อสังเกต

1. $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$
2. กราฟของ r และ r^{-1} จะสมมาตรกันตามเส้นตรง $y = x$



ฟังก์ชัน

1. ความหมายของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่ไม่มีสมาชิกตัวหน้าของสองคู่อันดับใดๆ เหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันหรืออาจกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า

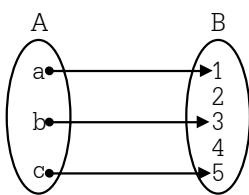
ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$

ถ้ากำหนดให้ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid P(x, y)\}$ เมื่อ $P(x, y)$ คือ เงื่อนไขของความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ในการตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันหรือไม่ สามารถตรวจสอบได้

ให้ f เป็นความสัมพันธ์ จะเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชัน เมื่อแต่ละสมาชิกในโดเมนมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ได้เพียงสมาชิกเดียวเท่านั้น

พิจารณาฟังก์ชันจากแผนภาพ

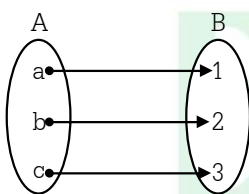
$$f: A \xrightarrow{1-1} B$$



เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ชนิด 1-1 ซึ่ง $D_f = A$, $R_f \subset B$ ซึ่งฟังก์ชันที่มีลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า "ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B " เขียนแทนด้วย

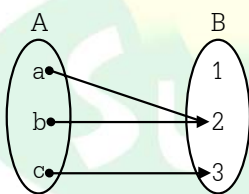
$$f: A \xrightarrow{1-1} B$$

$$f: A \rightarrow B$$



$D_f = A$ และ $R_f = B$ ฟังก์ชันในลักษณะดังกล่าวนี้เราเรียกว่า "ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B " เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$ ทั่วถึง

$$f: A \rightarrow B$$



เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากสมาชิกตัวหน้าหลายตัวไปจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียง 1 ตัว หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นฟังก์ชันแบบ many-to-one จาก A ไป B



การตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นกราฟ วิธีการตรวจสอบ คือ ลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน y ถ้ามีเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่ง ตัดกราฟเกิน 1 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

2. ใช้วิธีการคาดคะเน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในรูปสมการ โดยการพิจารณาจากตัวแปร y ถ้าเป็นตัวแปร y อยู่ในรูปที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มคู่หรืออยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ ให้พิจารณาไว้ก่อนว่าความสัมพันธ์นั้นไม่ควรเป็นฟังก์ชัน เช่น

$$y^2 = 4x \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อกำหนด } x = 1 \text{ จะได้ } y = 2 \text{ หรือ } y = -2$$

$$|y| = x \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อกำหนด } x = 1 \text{ จะได้ } y = 1 \text{ หรือ } y = -1$$

ซึ่งจากสมการทั้งสองจะเห็นได้ว่า ค่า x เพียงค่าเดียวแต่ทำให้เกิดค่า y ได้ 2 ค่า ความสัมพันธ์ในลักษณะนี้จะไม่เป็นฟังก์ชัน

3. ตรวจสอบโดยใช้หลักที่ว่า กำหนดคู่อันดับ 2 คูใดคู่ ที่ตัวหน้าซ้ำกัน แต่ตัวหลังต่างกัน ถ้าสรุปได้ว่าตัวหลังเท่ากันความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น ให้ $(a, b) \in r$ และ $(a, c) \in r$ ถ้า $b = c$ ก็สรุปได้ว่าเป็นฟังก์ชัน ซึ่งวิธีนี้ควรมีการฝึกให้มากๆ

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B

โดยทั่วๆ ไป เมื่อกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน จะหมายถึงว่า f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R ซึ่งไม่มีเงื่อนไขใดๆ เพิ่มเติม

ข้อสังเกต ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อสมาชิกในเรนจ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับโดเมนเพียงตัวเดียวเท่านั้น หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ไม่มีสมาชิกในโดเมน 2 สมาชิกหรือมากกว่าไปมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์สมาชิกเดียวกัน ดังนี้

*ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : \underset{\text{ไป}}{A} \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$

และ $R_f \subset B$

*ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : \underset{\text{ทั่วถึง}}{A} \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี

$D_f = A$ และ $R_f = B$

การตรวจสอบว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีการตรวจสอบคล้ายคลึงกับการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ซึ่งมีหลักดังนี้

1. ถ้าสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ ตรวจสอบโดยลากเส้นให้ขนานกับแกน x ถ้าเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ตัดกราฟเกิน 1 จุด แสดงว่าฟังก์ชันนั้นไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. ใช้วิธีการคาดคะเน จากการพิจารณาตัวแปร x ว่าอยู่ในรูปที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่ หรือตัวแปร x อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าว ฟังก์ชันนั้นไม่ควรเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง คือ ควรเป็นฟังก์ชันแบบ many-to-one



3. ตรวจสอบโดยใช้หลักที่ว่า กำหนดคู่อันดับ 2 คูใดๆ ที่ตัวหลังเหมือนกัน แต่ตัวหน้าต่างกัน ถ้าสรุปได้ว่าตัวหน้าก็ต้องเหมือนกันแล้วฟังก์ชันดังกล่าวควรเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B

$n(A)$ แทน จำนวนสมาชิกของเซต A

$n(B)$ แทน จำนวนสมาชิกของเซต B

ถ้าต้องการหาจำนวนฟังก์ชันที่ต่างๆ กัน เราสรุปได้ดังนี้

1. จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B เท่ากับ $n(B)^{n(A)}$
2. จำนวนฟังก์ชันจาก B ไป A เท่ากับ $n(A)^{n(B)}$
3. จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป A เท่ากับ $n(A)^{n(A)}$

2. ฟังก์ชันชนิดต่างๆ

1. ฟังก์ชันคงตัว (Constant function)

ฟังก์ชันคงตัว คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

กราฟของฟังก์ชันคงตัว จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และกราฟจะทับกับแกน x เมื่อ $c = 0$

2. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function)

ฟังก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = ax + b \text{ เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น จะเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y มีความชัน $= a$ และระยะตัดแกน $y = b$

3. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function)

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a, b, c \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ } a \neq 0$$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองเป็นรูปพาราโบลา จะมีลักษณะหงายขึ้น ถ้า $a > 0$ จะมีลักษณะคว่ำลงถ้า $a < 0$

และจุดยอดของพาราโบลาจะอยู่ที่ $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

4. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function)

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น จะเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y มีความชัน $= a$ และระยะตัดแกน $y = b$



5. ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function)

ฟังก์ชันตรรกยะ คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ โดยที่ } g \text{ และ } h \text{ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ } h(x) \neq 0$$

6. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value function)

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่

7. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step function)

ฟังก์ชันขั้นบันได คือ ฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วงๆ ลักษณะกราฟของฟังก์ชันนี้เหมือนกับขั้นบันได

8. ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (Period function)

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ ถ้ามีจำนวนจริงบวก k ซึ่งทำให้

$$f(x + k) = f(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x \text{ ที่อยู่ในโดเมนของ } f$$

ถ้า k เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ข้อความข้างต้นเป็นจริง เราเรียก k ว่า คาบของฟังก์ชัน f

9. ฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ (Even function and Odd function)

เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันคู่ ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = f(x)$

เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันคี่ ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = -f(x)$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ถ้า x มีค่ามากขึ้น และค่า y หรือ $f(x)$ ก็มีค่ามากขึ้นด้วย เราจะเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า x มีค่ามากขึ้น แต่ค่า y หรือ $f(x)$ มีค่าลดลง เราจะเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า เป็นฟังก์ชันลด

3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composit function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันโดยที่ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ คือ ฟังก์ชันที่มีเงื่อนไข ดังนี้

$$\text{สำหรับทุกๆ ค่าของ } x \text{ ซึ่งอยู่ในโดเมนของ } f \text{ และ } f(x) \text{ อยู่ในโดเมนของ } g$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ข้อควรทราบ

1. จะมี $g \circ f$ ได้ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

2. $g \circ f$ ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ $f \circ g$

3. $D_{g \circ f} = D_f$ เมื่อ $R_f \subset D_g$

4. $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5. ถ้า $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$ และ $g : B \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} C$ จะได้ว่า $g \circ f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} C$



4. อินเวอร์สความสัมพันธ์และอินเวอร์สฟังก์ชัน

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว อินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A นั่นคือ

$$\begin{aligned} r &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\} \\ r^{-1} &= \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $r \subset A \times B$ แล้ว $r^{-1} \subset B \times A$
2. $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

ข้อควรสนใจ

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 ด้วย
3. ถ้าอินเวอร์สของ f เป็นฟังก์ชัน จะเรียก f^{-1} ว่า อินเวอร์สฟังก์ชัน
4. ถ้า $y = f(x)$ และ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $x = f^{-1}(y)$
5. $f \circ f^{-1}$ ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ $f^{-1} \circ f$ แต่ $(f \circ f^{-1})(x) = x$ และ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง จะได้

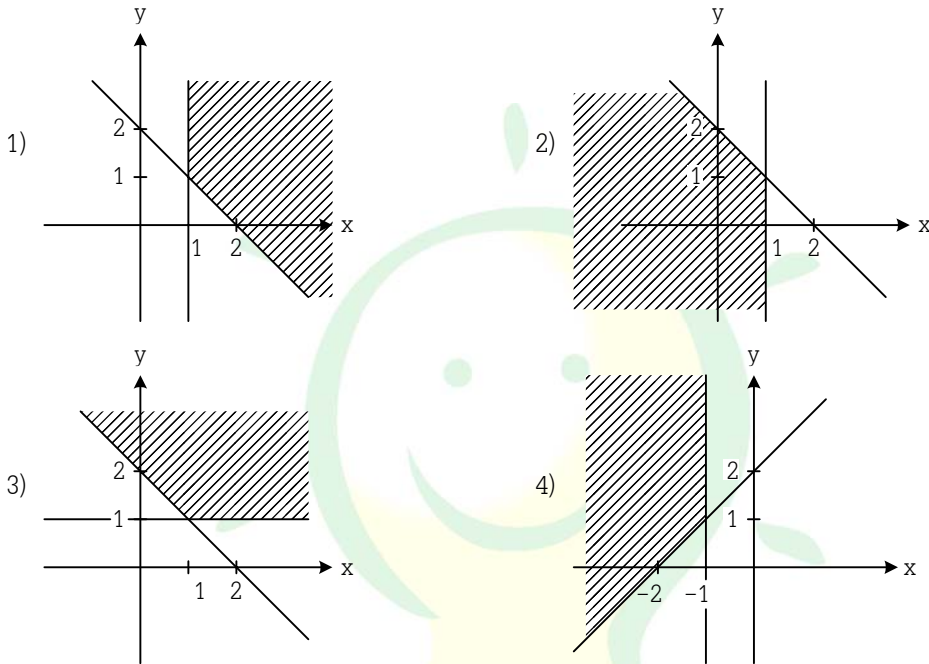
1. $f + g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) + g(x)\}$ โดยที่ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2. $f - g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) - g(x)\}$ โดยที่ $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3. $f \cdot g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \cdot g(x)\}$ โดยที่ $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
4. $\frac{f}{g} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{f(x)}{g(x)} \right\}$ โดยที่ $D_{f/g} = D_f \cap D_g$ ยกเว้นค่า x ที่ทำให้ $g(x) = 0$

ตัวอย่างเสริม

1. กำหนด $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ ความสัมพันธ์ในข้อใดมีสมาชิกมากที่สุด
 - 1) $\{(x, y) \in A \times B \mid y \neq x\}$
 - 2) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$
 - 3) $\{(x, y) \in A \times B \mid y > x\}$
 - 4) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\}$
2. ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 2\}$ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด
 - 1) $D_r = [0, 5]$, $R_r = [0, 3]$
 - 2) $D_r = [1, 5]$, $R_r = [0, 3]$
 - 3) $D_r = [1, 5]$, $R_r = [-1, 3]$
 - 4) $D_r = [0, 5]$, $R_r = [-1, 3]$



3. กราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ และ } x + y \geq 2\}$ ตรงกับรูปในข้อใด



4. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$r_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x^2 + 1} - 1 \right\}$$

$A = D_{r_1}$ และ $B = R_{r_2}$ ดังนั้น $A - B$ คือข้อใด

- 1) $[0, 1] \cup \{1\}$ 2) $(0, 1] \cup \{-1\}$ 3) $(0, 1]$ 4) $\{-1\}$

เฉลย

1. 1) 2. 3) 3. 1) 4. 3)

แนวข้อสอบ

- ให้ $A = \{0, 1, 2, (1, 2), (3, 2)\}$ และ $B = (A \times A) - A$ จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับเท่าใด
 1) 24 2) 25 3) 26 4) 27
- ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| - x\}$ เรนจ์ของ f คือข้อใดต่อไปนี้
 1) $(-\infty, \infty)$ 2) $(-\infty, 0]$ 3) $[0, \infty)$ 4) $\{0\}$



3. กำหนดจุด $A(-2, 0)$ และ $B(4, -2)$ และ $r = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ คือจุด } C \text{ ที่ทำให้ } AC \text{ ตั้งฉากกับ } BC\}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. โดเมนของ $r = [1 - \sqrt{10}, 1 + \sqrt{10}]$

ข. โดเมนของ $r =$ เรนจ์ของ r

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

4. ให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็ม กำหนดให้ $f: I^+ \rightarrow I^+$ โดย $f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \\ n & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$ ถ้า a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq 4$ แล้ว $f^{-1}(a+1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{2a+1}{a-4}$

2) $\frac{2a-1}{a-4}$

3) $\frac{2a+3}{a-4}$

4) $\frac{2a-3}{a-4}$

6. ให้ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+1}{x}\}$ เมื่อ \mathbb{R} เป็นเซตของจำนวนจริง เรนจ์ของ r คือข้อใดต่อไปนี้

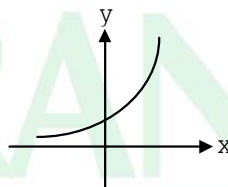
1) $\mathbb{R} - \{1\}$

2) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

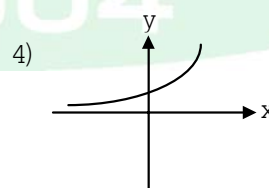
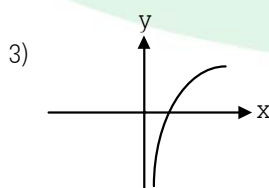
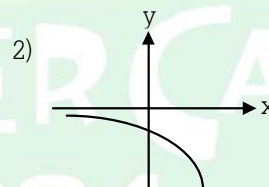
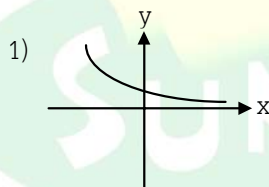
3) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

4) $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

7. กำหนดกราฟของความสัมพันธ์ r บนแกน x, y ดังภาพ



กราฟของ r^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้

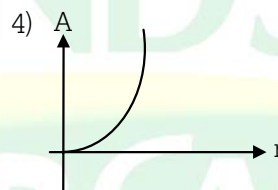
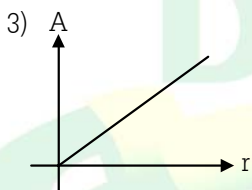
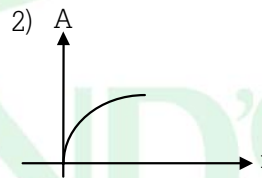
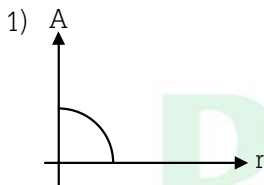


8. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้เป็นโดเมนของ f^{-1} เมื่อ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
- 1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ 2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ 3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ 4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$
9. ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = 2x - 1$, $h(x) = 2x^2 - 2x + 1$ และ $(f \circ g)(x) = h(x)$ แล้ว $g(3)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) 1 2) 3 3) 5 4) 7

10. ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x < 0 \\ x^2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x - 8 & , x > 2 \end{cases}$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $f(x) = 6$ แล้ว $\frac{x^2}{4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็น

- 1) 10.25 2) 11.25 3) 12.25 4) 14.25
11. กำหนดให้ $f(x) = 2^x$ แล้ว $\frac{f(x+3)}{f(x-1)}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $f(2)$ 2) $f(3)$ 3) $f(4)$ 4) $f(5)$
12. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in B \times B \mid |x - y| \text{ ทหารด้วย } 3 \text{ ลงตัว}\}$
โดยที่ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ จำนวนสมาชิกของเซต r เท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) 2 ตัว 2) 4 ตัว 3) 5 ตัว 4) 9 ตัว
13. วงกลมรัศมี r หน่วย และมีพื้นที่ A ตารางหน่วย กราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง r และ A คือข้อใดต่อไปนี้เป็น



14. ถ้า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ และ $f^{-1} \circ g = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ แล้ว g คือ ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $\{(a, 3), (c, 1), (d, 4)\}$ 2) $\{(1, c), (3, a), (4, d)\}$
- 3) $\{(1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ 4) $\{(a, c), (c, a), (d, d)\}$



15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(x) = x^2$ เมื่อ $x < -2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. $g(x) = \begin{cases} -(x+2) & \text{เมื่อ } x < -2 \\ x+2 & \text{เมื่อ } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

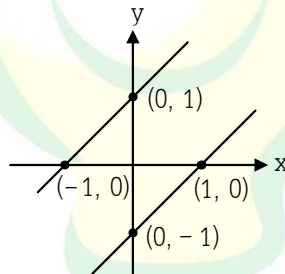
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

16. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก ให้ $r = \{(x, y) \mid yx^2 = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้คือเรนจ์ของ r

1) R^- 2) $R^- \cup \{0\}$ 3) $R - \{0\}$ 4) R^+

17. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้



1) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x + y| = 1\}$ 2) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$
 3) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$ 4) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$

18. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ ข. $R_f = \{x \mid 0 \leq x\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

19. ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2 - 2x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid x - 2y + 3 = 0\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

20. ถ้า $f(x) = 2x - 5$ และ $(f \circ g)(x) = -4x + 13$ แล้ว $g(1.3)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 6.0 2) 6.2 3) 6.4 4) 6.8

21. ให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = (x - 1)^3$ ค่าของ $2f^{-1}(2) + 3g^{-1}(1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1) 7 2) 8 3) 10 4) หาค่าไม่ได้



5. ถ้า $g = \left\{ \left(-3, \frac{1}{2}\right), (1, 3), (2, -3) \right\}$ และ $(f \circ g)(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, $x \neq 0$ แล้ว $f(-3)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) $-\frac{8}{9}$ 2) $-\frac{3}{4}$ 3) 0 4) 3
6. ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ กำหนดความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ดังนี้
 $r_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A \text{ และ } 2x + 4y \leq 15\}$
และ $r_2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A \text{ และ } x + 3y \leq 12\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) $r_1 \subset r_2$ 2) $r_2 \subset r_1$ 3) $r_1 = r_2$ 4) $r_1 \cap r_2 = \emptyset$
7. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right\}$
และ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) $D_r = [-3, 3]$ 2) $R_r = \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
3) $D_{r^{-1}} \cap I$ มีสมาชิก 7 ตัว 4) $R_{r^{-1}} \cap I$ มีสมาชิก 5 ตัว
8. กำหนดให้ $f(x) = 3x - 4$ และ $(f \circ g)(x) = x + 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) $g^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ 2) $g^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$
3) $g^{-1}(x) = 3x + 5$ 4) $g^{-1}(x) = 3x - 5$
9. กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังนี้
 $f(x) = x^3 - 1$
 $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x - 3 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$
- ถ้า $(f^{-1} \circ g)(1) = a$ และ $(g \circ f^{-1})(-1) = b$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) $a = 1, b = 1$ 2) $a = 1, b = -1$
3) $a = -1, b = 1$ 4) $a = -1, b = -1$
10. กำหนดให้ $f = \{(-1, 1), (0, 3), (3, 6), (4, 5)\}$ และ $g \circ f = \{(-1, 3), (0, 7), (3, 13), (4, 11)\}$ แล้ว g เป็น
สับเซตของเซตใดต่อไปนี้
- 1) $\{(x, y) \mid y = x + 2\}$ 2) $\{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$
3) $\{(x, y) \mid y = 4x - 1\}$ 4) $\{(x, y) \mid y = 5x - 2\}$



11. กำหนดให้ความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2 - 4}{9 - x^2} \right\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. โดเมนของ r คือ $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

ข. เรนจ์ของ r คือ $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{4}{9}, \infty\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

12. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = \frac{x-1}{x}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) $(f \circ g)(2) = -2$

2) $(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = -1$

3) $(f + g)(2) = -1$

4) $(f^{-1} + g^{-1})(2) = -2$

13. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$ และ $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 2$ แล้ว $f(x) + g(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $x^2 + 3x - 2$

2) $x^2 - 3x + 2$

3) $x^2 + 3x$

4) $x^2 - 3x$

14. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

และ $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ค่าของ $(g^{-1} \circ f^{-1})(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1

2) 0

3) 1

4) 3

15. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x|x|\}$ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือข้อใด

1) $r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \right\}$

2) $r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \right\}$

3) $r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \right\}$

4) $r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \right\}$

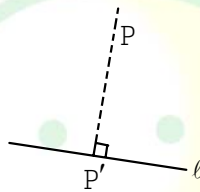


พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

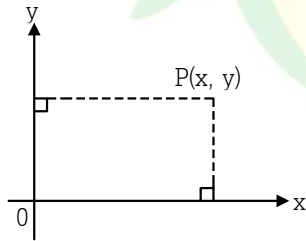
1. โพรเจกชัน (Projection)

1.1 โพรเจกชันของจุดบนเส้นตรง

โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง l คือ จุด P' ซึ่งเกิดจากเส้นตรงจากจุด P มาตั้งฉากกับเส้นตรง l



1.2 โพรเจกชันของจุดบนแกน x และแกน y



โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ ใดๆ บนแกน x คือ จุด $P'(x, 0)$

โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ ใดๆ บนแกน y คือ จุด $P'(0, y)$

เช่น โพรเจกชันของจุด $(3, 7)$ บนแกน x คือ จุด $(3, 0)$

โพรเจกชันของจุด $(4, 5)$ บนแกน y คือ จุด $(0, 5)$

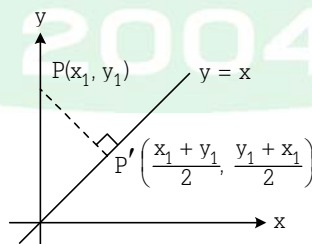
1.3 โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนเส้นตรง l

ถ้า AB เป็นส่วนของเส้นตรง และ l เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนเส้นตรง l คือ ส่วนของเส้นตรง $A'B'$ โดยที่ A' และ B' เป็นโพรเจกชันของจุด A และ B บนเส้นตรง l ตามลำดับ



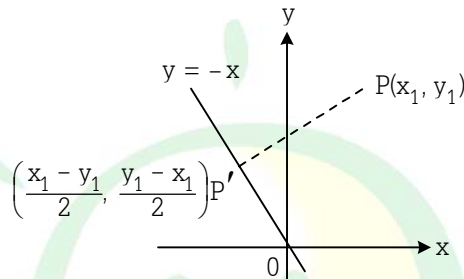
1.4 โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ บนเส้นตรง $y = x$

ให้ P' เป็นโพรเจกชันของจุด $P(x_1, y_1)$ บนเส้นตรง $y = x$ คือ จุด $P'\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{y_1 + x_1}{2}\right)$



1.5 โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ บนเส้นตรง $y = -x$

ให้ P' เป็นโพรเจกชันของจุด $P(x_1, y_1)$ บนเส้นตรง $y = -x$ คือ จุด $P' \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{y_1 + x_1}{2} \right)$



1.6 โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ บนเส้นตรงใดๆ

วิธีทำ

1. หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x, y)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่โจทย์กำหนด
2. แก้สมการเส้นตรงที่โจทย์กำหนดและเส้นตรงในข้อ 1 เพื่อหาจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้น
3. โพรเจกชันของ $P(x, y)$ บนเส้นตรงที่กำหนด คือ จุดตัดในข้อ 2

2. การหาระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด

ถ้า P และ Q เป็นจุด 2 จุดใดๆ ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q เขียนแทนด้วย $|PQ|$

2.1 ถ้า P และ Q เป็นจุดที่อยู่ในแนวที่ขนานกับแกน x

$P = (x_1, y)$, $Q = (x_2, y)$ แล้ว

$$|PQ| = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

2.2 ถ้า P และ Q เป็นจุดที่อยู่ในแนวที่ขนานกับแกน y

$P = (x, y_1)$, $Q = (x, y_2)$ แล้ว

$$|PQ| = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

2.3 ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดใดๆ 2 จุด บนระนาบ

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

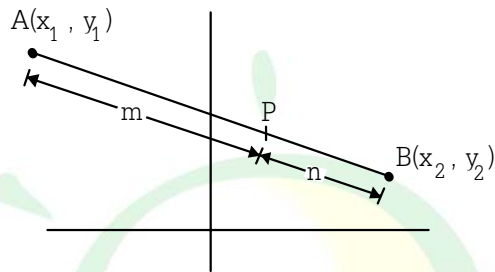
3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

ให้ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง

$$\text{จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง } AB \text{ คือ } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



**4. จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน $m : n$
จุดแบ่งภายใน**

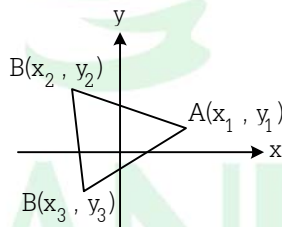


ให้ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง AB ที่มี P เป็นจุดแบ่งภายใน
ที่ทำให้ $|AP| : |PB| = m : n$ แล้ว จุด P คือ $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$

5. การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

วิธีทำ

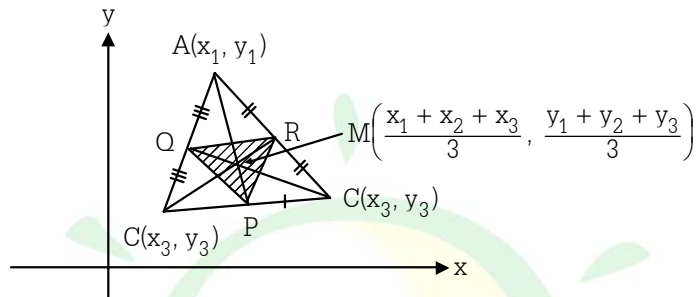
- นำจุดยอดของรูปเหลี่ยมมาเขียนเรียงในแนวตั้งในทิศทวนเข็มนาฬิกา
- ปิดท้ายด้วยจุดยอดแรก
- พื้นที่ของรูปเหลี่ยมจะเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของผลคูณทแยงลง ลบด้วยผลบวกของผลคูณทแยงขึ้น



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)| \end{aligned}$$



6. ข้อควรรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมเมื่อทราบจุดยอด



6.1 จุดที่เส้นมัธยฐานตัดกันคือ $M\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

6.2 พื้นที่ $\triangle PQR = \frac{1}{4}$ ของพื้นที่ $\triangle ABC$

7. ความชันของเส้นตรง

ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ ความชันของเส้นตรง l คือ m

โดยที่ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ หรือ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

ถ้า l_1 มีความชันเท่ากับ m_1 และ l_2 มีความชันเท่ากับ m_2 โดยที่ m_1 และ m_2 ไม่เท่ากับ 0 แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า l_1 ขนานกับ l_2 แล้ว $m_1 = m_2$
2. ถ้า l_1 ตั้งฉากกับ l_2 แล้ว $m_1 \times m_2 = -1$

8. สมการเส้นตรงในรูปแบบต่าง ๆ

8.1 จุด-ความชัน

ให้เส้นตรงผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน $= m$

สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

8.2 จุด-จุด

ให้เส้นตรงผ่านจุด 2 จุด คือ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

หรือ $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$

เมื่อ $x_1 \neq x_2$

8.3 ความชัน-จุดตัดแกน y

ให้เส้นตรงมีความชัน $= m$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, c)$

สมการเส้นตรง คือ $y = mx + c$



8.4 ระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

ให้เส้นตรงมีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$
นั่นคือ ตัดแกน x ที่จุด $(a, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, b)$

$$\text{สมการเส้นตรง คือ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

8.5 สมการเส้นตรงในรูปทั่วไป

ให้สมการเส้นตรงที่อยู่ในรูปทั่วไป คือ $Ax + By + C_1 = 0$ จะได้ว่าเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงนี้ คือ $Bx - Ay + C_2 = 0$

9. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

กำหนดเส้นตรง คือ $Ax + By + C = 0$ และ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดภายนอกเส้นตรง ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรงจะได้ว่า

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

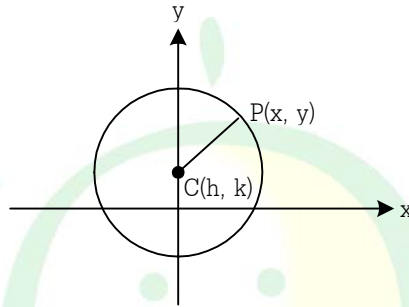
10. ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

ให้เส้นตรง 2 เส้น ขนานกันมีสมการ คือ $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$
ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นขนานทั้ง 2 จะได้ว่า

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



วงกลม (Circle)



จุด $C(h, k)$ เป็นจุดคงที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง

$|CP|$ = ระยะทางคงที่ เรียกว่า รัศมี

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดซึ่งห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงตัว จุดคงที่ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ระยะคงที่ เรียกว่า **รัศมี**

รูปแบบสมการวงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
$x^2 + y^2 = r^2$	$(0, 0)$	r
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	(h, k)	r
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$ กราฟที่ได้จะเป็นจุดวงกลม
2. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ กราฟที่ได้จึงเป็นวงกลม
3. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ จะไม่เกิดกราฟในระบบจำนวนจริง

ข้อสำคัญ

ในเรื่องวงกลม ถ้าต้องการหาสมการวงกลม จะต้องทราบ

1. จุดศูนย์กลาง
2. รัศมี

การหาจุดศูนย์กลาง อาจทำได้ดังนี้

- กำหนดโดยตรง เช่น ให้จุดศูนย์กลาง คือ $C(h, k)$
- กำหนดจุดศูนย์กลาง คือ จุดที่เส้นตรงตัดกัน
- กำหนดจุดศูนย์กลาง โดยให้มีความสัมพันธ์กับกราฟอื่นๆ



การหาความยาวรัศมี อาจหาได้ดังนี้

- โจทย์อาจกำหนดความยาวของเส้นรอบวงมาให้ ($2\pi r$)

- กำหนดความยาวระหว่างจุด 2 จุด หาได้จากสูตร $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

- กำหนดจุดศูนย์กลาง (h, k) และเส้นสัมผัส $Ax + By + C = 0$

รัศมี คือ ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง ซึ่งหาได้จาก $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

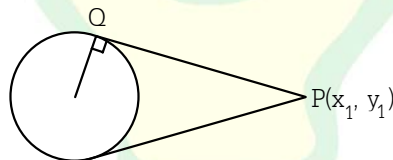
ดังนั้น $r = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

- อื่นๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะโจทย์ในแต่ละข้อ

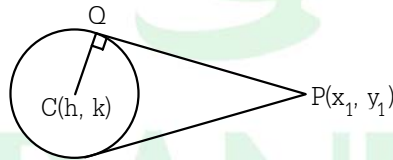
ความยาวของเส้นสัมผัส

ให้ $|PQ|$ เป็นความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด P มาสัมผัสวงกลมที่จุด Q

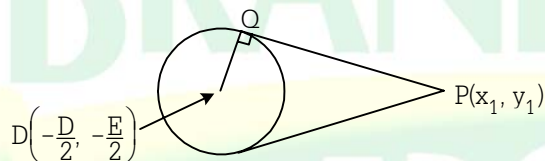
1. ถ้าสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 = r^2$ แล้ว $|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$ ดังรูป



2. ถ้าสมการวงกลม คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ แล้ว $|PQ| = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$ ดังรูป



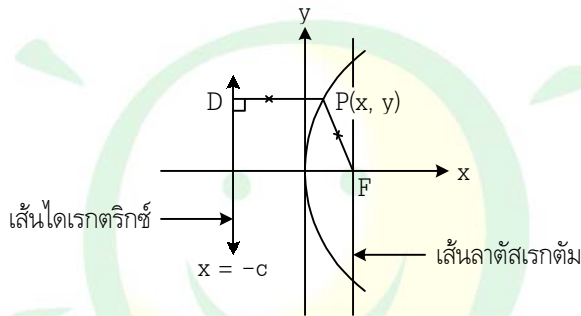
3. ถ้าสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ แล้ว $|PQ| = \sqrt{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F}$ ดังรูป



พาราโบลา (Parabola)

นิยาม

พาราโบลา คือ เซตของจุดบนพื้นระนาบซึ่งมีระยะห่างจากจุดคงที่ เท่ากับระยะที่ห่างจากเส้นตรงคงที่



จุดคงที่ คือ จุดโฟกัส (Focus)

เส้นตรงที่คงที่ คือ เส้นไดเรกทริกซ์

เส้นลัตัสเรกตัม (Latus rectum) คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุด Focus และตั้งฉากกับแกนของรูป

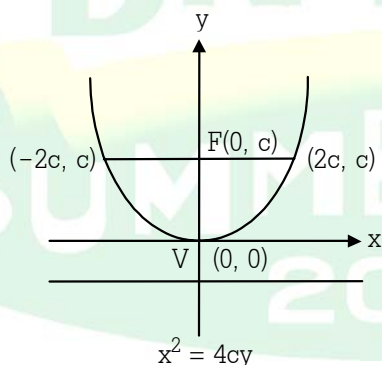
แกนของรูปหรือแกนสมมาตร คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดและผ่านจุด Focus

คอร์ดของพาราโบลา คือ เส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด 2 จุด ที่ต่างกันของพาราโบลาและคอร์ดที่ลากผ่านจุด Focus เรียกว่า Focul และคอร์ดที่ผ่านจุด Focus และตั้งฉากกับแกนของรูปด้วย เรียกว่า ลัตัสเรกตัม (Latus rectum)

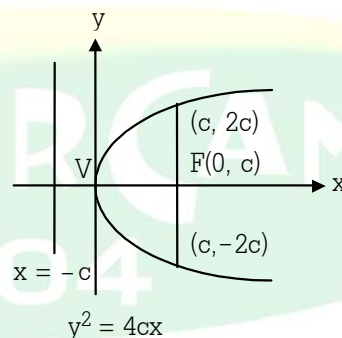
ข้อสังเกต

จากสมการ จะต้องมีส่วนแปรตัวใดตัวหนึ่งอยู่ในรูปกำลังสอง และอีกตัวหนึ่งยกกำลังหนึ่ง และอยู่ที่เทอมที่บวกกลับกัน กราฟที่ได้จึงจะเป็นกราฟพาราโบลา

รูปแบบของพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0)



พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่จุด (0, 0)
และแกนของรูปทับแกน y



พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่จุด (0, 0)
และแกนของรูปทับแกน x



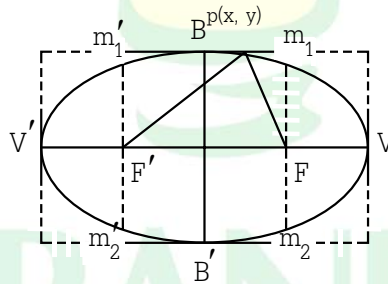
สรุป

$x^2 = 4cy$	รูปสมการ	$y^2 = 4cx$
$v(0, 0)$	จุดยอด	$V(0, 0)$
$F(0, c)$	จุด Focus	$F(c, 0)$
$y = -c$	สมการเส้นไดเรกตริกซ์	$x = -c$
$ 4c $	ความยาวเส้นลาตัสเรกตัม	$ 4c $
รูปหงาย (เปิดบน)	ถ้า $c > 0$	รูปตะแคงขวา (เปิดขวา)
รูปคว่ำ (เปิดล่าง)	ถ้า $c < 0$	รูปตะแคงซ้าย (เปิดซ้าย)
$(-2c, c), (2c, c)$	จุดปลายเส้นลาตัสเรกตัม	$(c, 2c), (c, -2c)$

วงรี (Ellipse)

นิยาม

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ จุดหนึ่งในเซตไปยังจุดคงที่ 2 จุด มีค่าคงตัว



ส่วนประกอบของวงรี

F, F' เป็นจุดคงที่ เรียกว่า Focus

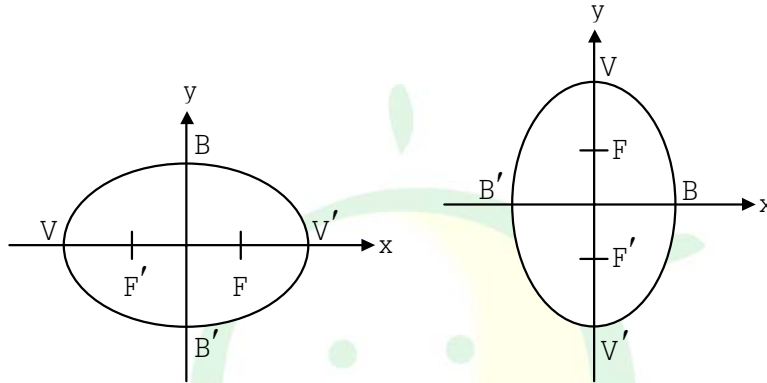
V, V' เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด Focus และมีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอด เรียกว่า แกนเอก

B, B' เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนเอก โดยมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรี เรียกว่า แกนโท

$m_1m_2, m_1'm_2'$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด Focus และตั้งฉากกับแกนของรูป เรียกว่า เส้นลาตัสเรกตัม



วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0)



สรุป

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	รูปสมการ	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
(0, 0)	จุดศูนย์กลาง	(0, 0)
V(a, 0), V'(-a, 0)	จุดยอด	V(0, a), V'(0, -a)
F(c, 0), F'(-c, 0)	จุด Focus	F(0, c), F'(0, -c)
2a	ความยาวแกนเอก	2a
2b	ความยาวแกนโท	2b
B(0, b), B'(0, -b)	จุดปลายแกนโท	B(b, 0), B'(-b, 0)
$\frac{2b^2}{ a }$	ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{ a }$
	ข้อควรจำ $b^2 = a^2 - c^2$	

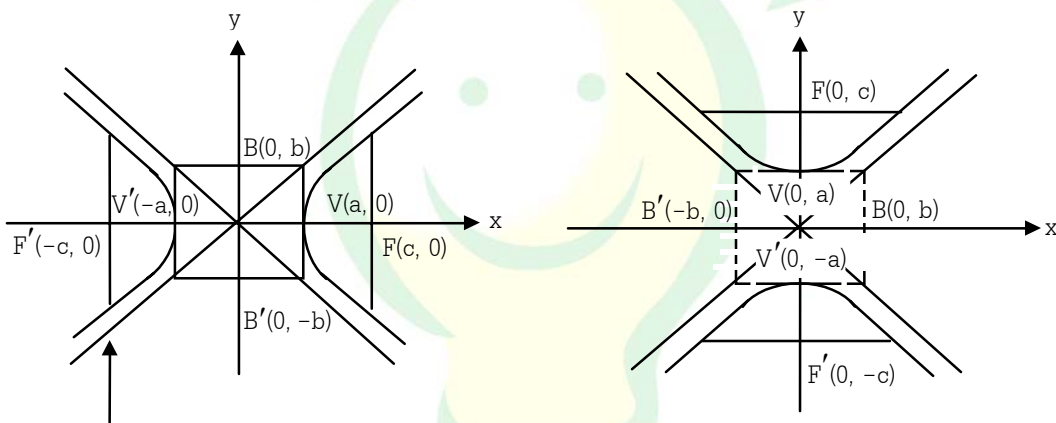


ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

นิยาม

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด มีค่าคงตัว

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$



เส้นกำกับ (Asymptote)

สรุป

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	รูปสมการ	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
$(0, 0)$	จุดศูนย์กลาง	$(0, 0)$
$V(a, 0), V'(-a, 0)$	จุดยอด	$V(0, a), V'(0, -a)$
$F(c, 0), F'(-c, 0)$	จุดโฟกัส	$F(0, c), F'(0, -c)$
$B(0, b), B'(0, -b)$	จุดปลายแกนตั้งฉาก	$B(b, 0), B'(-b, 0)$
$ 2a $	ความยาวแกนตามขวาง	$ 2a $
$ 2b $	ความยาวแกนตั้งฉาก	$ 2b $
$\frac{2b^2}{ a }$	ความยาวของเส้นลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{ a }$
$y = \pm \frac{b}{a}x$	สมการของเส้นกำกับ (Asymptote)	$y = \pm \frac{a}{b}x$
	ข้อควรจำ $b^2 = c^2 - a^2$	



การพิจารณากราฟจากสมการ

1. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของ x, y บวกหรือลบกัน เท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง หรือสมการมีตัวแปร x หรือ y เพียงตัวใดตัวหนึ่งเท่ากับค่าคงที่ กราฟที่ได้จะเป็นสมการเส้นตรง ตัวอย่างสมการ เช่น

$$Ax + By + C = 0 \text{ เป็นเส้นตรงในรูปทั่วไป}$$

$$y = b \text{ เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน } x$$

$$x = a \text{ เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน } y$$

2. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งยกกำลังสองเพียงตัวเดียว และอีกตัวหนึ่งยกกำลังหนึ่ง กราฟที่ได้จะเป็นกราฟพาราโบลา ซึ่งสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

1. ถ้าเป็นเทอมของ x ยกกำลังสอง กราฟที่ได้จะเป็นกราฟที่มีลักษณะเป็นรูปคว่ำหรือหงายเท่านั้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการจัดรูปสมการแล้วพิจารณาค่าคงที่ เช่น จัดสมการเป็น $x^2 = 4Cy$ หรือ $(x - h)^2 + 4C(y - k)$ จะพิจารณาที่ค่าของ C ถ้า $C > 0$ กราฟจะเป็นรูปหงาย แต่ถ้า $C < 0$ กราฟจะเป็นรูปคว่ำ หรือจัดสมการเป็น $y = ax^2 + bx + c$ ก็ให้พิจารณาที่ a ถ้า $a > 0$ รูปกราฟก็เป็นรูปหงาย แต่ถ้า $a < 0$ รูปกราฟจะเป็นรูปคว่ำ

2. ถ้าเป็นเทอมของ y ยกกำลังสอง กราฟที่ได้จะเป็นรูปตะแคง แล้วพิจารณาค่าคงที่เช่นเดียวกันกับการพิจารณาเทอมของ x^2 กล่าวคือ ถ้าค่าคงที่ซึ่งอาจจะเป็นตัว a หรือ c มากกว่า 0 กราฟก็จะตะแคงทางด้านขวา แต่ถ้า a หรือ c น้อยกว่า 0 กราฟจะตะแคงด้านซ้าย

3. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของ x^2, y^2 บวกกัน โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 เท่ากัน กราฟที่ได้จะมีลักษณะเป็นวงกลม ซึ่งมีรูปสมการ เช่น $x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$ แต่ต้องพิจารณาเงื่อนไขเพิ่มเติม

4. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของ x^2, y^2 บวกกัน โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^2, y^2 ไม่เท่ากัน กราฟที่ได้จะเป็นวงรี

5. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของ x^2, y^2 ลบกัน โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 จะเท่ากันหรือไม่ก็ได้ กราฟที่ได้จะเป็นไฮเพอร์โบลา

6. ถ้าสมการอยู่ในเทอมของ x, y คูณกันแล้ว เท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่งจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ กราฟที่ได้จะเป็นกราฟไฮเพอร์โบลาแบบแกนมุมฉาก

การพิจารณากราฟในแต่ละลักษณะนั้น จะมีข้อปลีกย่อยเพิ่มเติมอีก ซึ่งจะกล่าวถึงในแต่ละเรื่องอีกครั้งหนึ่ง

ตัวอย่างการพิจารณากราฟจากสมการ

สมการที่ควรสนใจ

1. $x^2 = y^2$ กราฟที่ได้จะเป็นกราฟเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งมีสมการดังนี้ คือ $x + y$ และ $y = -x$ กราฟเส้นตรงทั้งสองนี้จะตัดกันที่จุด $(0, 0)$

2. $x^2 - y^2 = x + y$ กราฟที่ได้จะเป็นกราฟเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งมีสมการเป็น $x + y = 0$ และ $x - y - 1 = 0$ โดยที่เส้นทั้งสองจะตัดกันที่จุด $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

3. $x^2 - y^2 = x - y$ กราฟที่ได้จะเป็นกราฟเส้นตรง 2 เส้น คือ $x + y = 0$ และ $x + y - 1 = 0$ โดยที่เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



4. $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 = 25$ เป็นกราฟวงรี 1 วง โดยมีแกน x เป็นแกนหลัก และสามารถจัดสมการใหม่ได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จัดสมการใหม่ได้ดังนี้} \quad (x^2 + 2y^2)^2 &= 25 \\ \frac{x^2}{5} + \frac{2y^2}{5} &= 1 \\ x^2 + 2y^2 &= \pm 5 \end{aligned}$$

แต่ค่าลบใช้ไม่ได้
ดังนั้น

$$x^2 + 2y^2 = 5$$

5. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 = 100$ กราฟที่ได้จะเป็นไฮเพอร์โบลา 2 รูป

$$\begin{aligned} \text{จัดสมการใหม่ได้ดังนี้} \quad (x^2 - 2y^2)^2 &= 100 \\ x^2 - 2y^2 &= \pm 10 \end{aligned}$$

แยกสมการ

$$x^2 - 2y^2 = 10 \text{ และ } 2y^2 - x^2 = 10$$

6. $y^4 - 4y^2x + 4x^2 = 64$ กราฟที่ได้เป็นกราฟพาราโบลา ซึ่งเป็นรูปตะแคง 2 รูป

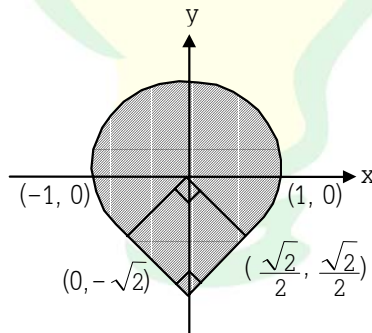
$$\begin{aligned} \text{จัดสมการใหม่ได้ดังนี้} \quad (y^2 - 2x)^2 &= 64 \\ y^2 - 2x &= \pm 8 \end{aligned}$$

แนวข้อสอบ

- เส้นตรง $x - 2ay + 1 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(1, -5)$ และจุด $Q(-1, 3)$ ค่า a คือข้อใด
1) -4 2) -2 3) 2 4) 4
- เส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 4)$ และมีระยะตัดแกน x เป็นครึ่งหนึ่งของระยะตัดแกน y จะมีความชันและระยะตัดแกน y ตรงกับข้อใด
1) -2 และ 4 2) -2 และ 8 3) 2 และ 4 4) 2 และ 8
- กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี AB เป็นฐาน ถ้าพิกัดของจุด A, B และ C เป็น $(-4, 2), (4, -6)$ และ $(x, 5)$ ตามลำดับ x มีค่าเท่ากับข้อใด
1) 3.0 2) 3.1 3) 7.0 4) 8.1
- เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 4)$ จะตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 2y - 1 = 0$ ที่จุดในข้อใด
1) $(1.0, 2.0)$ 2) $(1.1, 1.8)$ 3) $(1.2, 1.8)$ 4) $(1.2, 1.9)$
- ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(2, 3)$ และ $B(4, -5)$ ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด P และขนานกับแกน x สมการแสดงกราฟของเส้นตรง L คือข้อใด
1) $x = 3$ 2) $y = -1$ 3) $x = -1$ 4) $y = 4$



6. จงหาจุดบนแกน x ซึ่งมีระยะห่างจากจุด $(4, 5)$ และ $(3, -2)$ เป็นระยะทางเท่ากัน
 1) $(7, 0)$ 2) $(-7, 0)$ 3) $(14, 0)$ 4) $(-14, 0)$
7. โพรเจกชันของจุดซึ่งเกิดจากเส้นตรง $3x - 2y + 4 = 0$ และเส้นตรง $4x + 2y + 3 = 0$ ตัดกันบนเส้นตรง $y = -x$ คือจุดในข้อใด
 1) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 2) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 3) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ 4) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$
8. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีจุด $A(-5, 0)$, $B(9, 0)$ และ $C(-3, 6)$ เป็นจุดยอด พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใด
 1) 45 ตารางหน่วย 2) 44 ตารางหน่วย 3) 43 ตารางหน่วย 4) 42 ตารางหน่วย
9. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีจุดปลายของเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง คือ $P(-1, -2)$ และ $R(2, -6)$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่เท่าใด
 1) 25 ตารางหน่วย 2) 12.5 ตารางหน่วย 3) 6.25 ตารางหน่วย 4) ข้อมูลไม่เพียงพอ
10. จากรูป พื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับเท่าใด



- 1) $\frac{3\pi}{4} + 1$ ตารางหน่วย 2) $\pi + \frac{3}{4}$ ตารางหน่วย
 3) $\pi + 1$ ตารางหน่วย 4) $2\pi + 1$ ตารางหน่วย
11. ความยาวของคอร์ดที่ได้จากการตัดกันของพาราโบลา $y^2 = 5 + x$ กับเส้นตรง $x + y = 1$ มีค่าเท่ากับกี่หน่วย
 1) $5\sqrt{3}$ หน่วย 2) $4\sqrt{7}$ หน่วย 3) $5\sqrt{2}$ หน่วย 4) $3\sqrt{2}$ หน่วย
12. กำหนดจุด $A(-4, 3)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และห่างจากจุด $(0, 0)$ เป็นระยะ 3 หน่วย
 1) $x = -4$ และ $7x + 24y - 440 = 0$ 2) $x = -4$ และ $7x - 24y + 100 = 0$
 3) $y = 3$ และ $24x + 7y - 75 = 0$ 4) $y = 3$ และ $24x + 7y + 75 = 0$
13. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, -2)$ และรัศมียาวเท่ากับ $\sqrt{5}$ หน่วย เมื่อเส้นสัมผัสมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$
 1) $x - 2y + 2 = 0$ และ $x - 2y - 8 = 0$ 2) $x + 2y - 2 = 0$ และ $x + 2y - 8 = 0$
 3) $x - 2y - 2 = 0$ และ $x - 2y + 8 = 0$ 4) $x + 2y - 2 = 0$ และ $x + 2y + 8 = 0$



27. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $16x^2 - 49y^2 + 784 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด
- 1) ถ้าลากเส้นผ่านจุดยอดของ H ให้ขนานกับแกนตั้งยุค และลากเส้นตรงผ่านจุดปลายของแกนตั้งยุค ให้ขนานกับแกนตามขวาง จะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเส้นทแยงมุมทั้งสองตัดกันที่จุดกำเนิดแล้วเส้นตรงทแยงมุมเส้นหนึ่งจะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $4y = 7x$
 - 2) สี่เหลี่ยมผืนผ้าในข้อ 1) มีพื้นที่ 112 ตารางหน่วย
 - 3) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และผ่านโฟกัสทั้งสองของ H มีพื้นที่ 65π ตารางหน่วย
 - 4) H ไม่ใช่ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (Rectangular hyperbola)
28. ข้อใดคือสมการของกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางยาวเท่ากับ 6 และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, 4)
- 1) $7y^2 = 9x^2 + 63$
 - 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
 - 3) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{8} = 1$
 - 4) $8x^2 = 9y^2 + 72$
29. ให้ P และ Q เป็นโพรเจกชันของจุด (2, -4) และจุด (-2, 4) บนแกน y ตามลำดับ ถ้ากราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด P และ Q เป็นจุดยอดและผ่านจุด (-3, 5) แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนกราฟของไฮเพอร์โบลานี้
- 1) (1, $\sqrt{17}$)
 - 2) (2, $2\sqrt{3}$)
 - 3) (3, $\sqrt{27}$)
 - 4) (4, $2\sqrt{15}$)
30. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (-3, 6) และผ่านจุด (1, 3) จะตัดแกน x หรือแกน y ที่จุดใดต่อไปนี้
- 1) (0, 2) และ (0, 10)
 - 2) (2, 0) และ (10, 0)
 - 3) (2, 0) และ (-8, 10)
 - 4) (0, 2) และ (0, -8)
31. ถ้าพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (0, 0) และมีเส้นไดเรกทริกซึ่งขนานกับแกน y และสัมผัสวงกลม $x^2 - 8x + y^2 = 20$ แล้ว สมการของพาราโบลา คือสมการในข้อใดต่อไปนี้
- 1) $y^2 = 8x$ และ $y^2 = 40x$
 - 2) $y^2 = -8x$ และ $y^2 = 40x$
 - 3) $y^2 = 8x$ และ $y^2 = -40x$
 - 4) $y^2 = -8x$ และ $y^2 = -40x$
32. ความยาวของเส้นสัมผัส PQ ที่ลากจากจุด P(3, 4) มาสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$ ที่จุด Q ยาวกี่หน่วย
- 1) 4
 - 2) 5
 - 3) 6
 - 4) 7
33. ให้ (x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นโค้งเส้นหนึ่ง ถ้าจุด (x, y) อยู่ห่างจากเส้นตรง $x = -2$ เป็น 2 เท่าของระยะห่างระหว่างจุด (x, y) กับจุด (2, 0) สมการของเส้นโค้งนั้นคือข้อใด
- 1) $y^2 = 8x$
 - 2) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 12 = 0$
 - 3) $4x^2 + 4y^2 - 17x + 14 = 0$
 - 4) $3x^2 + 4y^2 - 20x + 12 = 0$



ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

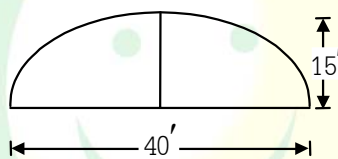
1. กำหนดให้ A เป็นจุดยอดของกราฟพาราโบลา $y^2 = 12x$ ซึ่งเส้นไดเรกทริกซ์ตัดแกน x ที่จุด B และให้ C เป็นจุดบนเส้นไดเรกทริกซ์ที่ทำให้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 9 ตารางหน่วย ในรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า $\cot C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 1) $\frac{1}{8}$
 - 2) $\frac{1}{2}$
 - 3) 2
 - 4) 8
2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $2x + 3y - 4 = 0$ คือสมการในข้อใดต่อไปนี้
 - 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{13}$
 - 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{25}{13}$
 - 3) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{13}$
 - 4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{13}$
3. ให้ $P(a, b)$ เป็นจุดบนวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ซึ่งอยู่ในควอดรันต์ที่หนึ่ง ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงรีโดยที่เส้นตรง PC ทำมุม 30° กับแกนเอกของวงรี แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ คือข้อใดต่อไปนี้
 - 1) $\frac{225}{9}$
 - 2) $\frac{225}{13}$
 - 3) $\frac{225}{25}$
 - 4) $\frac{225}{34}$
4. ให้ A และ B เป็นจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $16x^2 - 9y^2 = 144$ และ C คือ จุด $(-2, 3)$ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางหน่วย
5. กำหนดให้ ΔABC มี $\hat{A} = 30^\circ$ และ $\hat{C} = 45^\circ$ ถ้าให้ BC เป็นฐาน แล้ว ΔABC จะมีส่วนสูงเท่ากับ $\sqrt{2}$ หน่วย พื้นที่ของ ΔABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ตารางหน่วย)
 - 1) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - 2) $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 - 3) $\sqrt{3}$
 - 4) $1 + \sqrt{3}$
6. กำหนดให้พาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสอยู่บนแกน x ถ้าจุดตัดจุดหนึ่งของพาราโบลากับเส้นตรง $x + 3y + 10 = 0$ คือ จุด $(2, -4)$ แล้วระยะทางจากเส้นตรงนี้ถึงจุดโฟกัสของพาราโบลา มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 1) 4 หน่วย
 - 2) 6 หน่วย
 - 3) $\frac{10}{\sqrt{10}}$ หน่วย
 - 4) $\frac{12}{\sqrt{10}}$ หน่วย
7. สมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 0)$ และผ่านจุดยอดทั้งสองของวงรี $16x^2 + 10y^2 = 160$ คือสมการในข้อใดต่อไปนี้
 - 1) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$
 - 2) $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$
 - 3) $x^2 + y^2 + 4x - 16 = 0$
 - 4) $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$
8. กำหนดให้ A และ B เป็นจุด $(-5, 4)$ และ $(3, 2)$ ตามลำดับ ถ้าเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง \overline{AB} ตัดแกน y ที่จุด $(0, b)$ แล้ว b มีค่าเท่าใด
9. กำหนดให้เส้นตรงที่ผ่านจุด $A(a, 5)$ และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 8)$ และ $D(-2, 4)$ วงกลมที่ลากผ่านจุด A และมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 2)$ ตัดแกน y ที่จุดในข้อใดต่อไปนี้
 - 1) $(0, -3)$ และ $(0, 7)$
 - 2) $(0, -5)$ และ $(0, 5)$
 - 3) $(0, -7)$ และ $(0, 3)$
 - 4) $(0, 2 + \sqrt{13})$ และ $(0, 2 - \sqrt{13})$



10. กำหนดวงรี $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$ ถ้าไฮเพอร์โบลามีจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่โฟกัสของวงรี และมีความยาวแกนลึงยุค เท่ากับความยาวแกนโทของวงรี แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้
- 1) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{10} = 1$ 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$ 3) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{1} = 1$ 4) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$

เก็งข้อสอบ

11. ประตูกึ่งวงรีเป็นรูปครึ่งวงรี กว้าง 40 ฟุต และสูง 15 ฟุต ที่จุดกึ่งกลางประตู (ตั้งรูป) ความสูงของประตูที่จุดห่างจาก จุดกึ่งกลางประตู 12 ฟุต คือข้อใดต่อไปนี้



- 1) 11.25 ฟุต 2) 12 ฟุต 3) 12.76 ฟุต 4) 13 ฟุต
12. ให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี $\sqrt{20}$ หน่วย ถ้า $(1, 4), (4, 1)$ เป็นจุดบนวงกลมนั้นแล้ว ค่าของ $\frac{h}{k}$ คือข้อใดต่อไปนี้
- 1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\frac{3}{2}$ 4) 2
13. กำหนดให้เสาไฟฟ้าแรงสูงสองต้น มีตำแหน่งในระบบพิกัดฉากเป็น $(1, 0)$ และ $(-1, 8)$ ตามลำดับ สมชายยืนอยู่ในตำแหน่งพิกัด $(3, 5)$ ระยะที่สมชายยืนอยู่ห่างจากเส้นตรงที่ผ่านเสาไฟฟ้าทั้งสอง คือข้อใดต่อไปนี้
- 1) $\frac{13}{\sqrt{17}}$ หน่วย 2) $\frac{21}{\sqrt{17}}$ หน่วย 3) 13 หน่วย 4) 21 หน่วย
14. เส้นตรงผ่านจุด $(2, -1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y = 4$ ตัดแกน y มีจุดๆ หนึ่ง จุดนั้น y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) $-\frac{1}{5}$ 2) $-\frac{1}{4}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) $-\frac{1}{2}$
15. ให้ C เป็นจุดยอดของวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C ผ่านจุด $(0, 0)$ คือข้อใดต่อไปนี้
- 1) $x^2 + 10x + y^2 = 0$ 2) $x^2 - 10x + y^2 = 25$
 3) $x^2 + y^2 + 10y = 0$ 4) $x^2 + y^2 - 10y = 25$
16. ให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AE ; B และ D เป็นจุดอีก 2 จุด บนเส้นตรง AE โดยที่ $AB = BC$ และ $CD = DE$ แล้ว AD จะยาวเป็นกี่เท่าของ AC
- 1) 1 เท่าของ AC 2) 1.5 เท่าของ AC 3) 2 เท่าของ AC 4) 2.5 เท่าของ AC
17. ถ้าลากเส้นตรงจากจุด $A(-3, -4)$ ไปยังจุด $B(3, 4)$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) ความยาวของเส้นตรง AB เท่ากับ 5 หน่วย 2) เส้นตรง AB ขนานกับแกน x
 3) เส้นตรง AB ผ่านจุดกำเนิด 4) เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง $4y - 3x = 0$



18. ถ้าพื้นที่ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ มีค่าเท่ากับ 25π ตารางหน่วยแล้ว วงกลมวงนี้จะไม่ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $(-5, 0)$ 2) $(5, 0)$ 3) $(0, 5)$ 4) $(5, 5)$

19. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมีเส้นตรง $y = 4$ เป็นไดเรกทริกซ์ จะผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

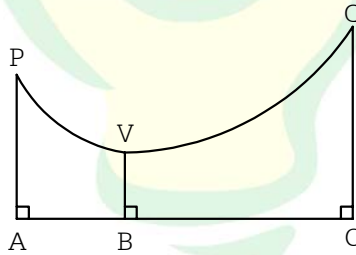
- 1) $(4, -1)$ 2) $(4, -\frac{1}{4})$ 3) $(4, \frac{1}{4})$ 4) $(4, 1)$

20. ถ้าต้องการให้กราฟของ $y = x^2 - 5x + k$ สัมผัสกับแกน x ค่าของ k มีค่าเท่ากับเท่าใด

21. จุดยอดของสมการไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 8x - 9y^2 = 32$ คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ 2) $(0, -2)$ และ $(0, 4)$
3) $(-2, 0)$ และ $(4, 0)$ 4) $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

22. จากรูป ABC เป็นสะพานซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรง PQ เป็นสายเคเบิล ซึ่งมีลักษณะโค้งเป็นพาราโบลาโดยมี V เป็นจุดยอด PA = 100 ฟุต, VB = 25 ฟุต, AB = 700 ฟุต, BC = 900 ฟุต OC มีความยาวตรงกับข้อใด



- 1) 125 ฟุต 2) 130 ฟุต 3) $\frac{7300}{49}$ ฟุต 4) $\frac{8300}{49}$ ฟุต

23. ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับเซตของจุด (x, y) ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีแกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย

- 1) $\{(x, y) | x^2 + 16y^2 = 16\}$ 2) $\{(x, y) | x^2 + 16y^2 = 64\}$
3) $\{(x, y) | x^2 - 16y^2 = 16\}$ 4) $\{(x, y) | x^2 - 16y^2 = 64\}$

24. วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น $9x^2 + 4y^2 = 36$ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงรี และมีรัศมีเท่ากับความยาวครึ่งแกนโทของวงรี มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

- 1) $x^2 + y^2 = 2$ 2) $x^2 + y^2 = 3$ 3) $x^2 + y^2 = 4$ 4) $x^2 + y^2 = 9$

25. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ ไดเรกทริกซ์เป็นเส้นตรง $x = 3$ คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) $y^2 = 4x$ 2) $y^2 = -4x$ 3) $y^2 = 12x$ 4) $y^2 = -12x$

26. จงหาส่วนตัดบนแกน y ของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(5, 2)$ และ $B(-3, 0)$

27. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 = 144$ คือข้อใดต่อไปนี้

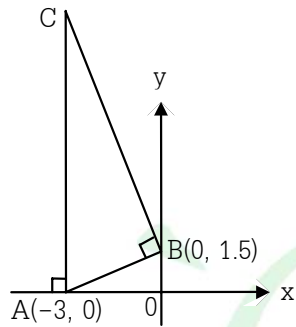
- 1) $(0, -5)$ และ $(0, 5)$ 2) $(0, -\sqrt{7})$ และ $(0, \sqrt{7})$
3) $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ 4) $(-\sqrt{7}, 0)$ และ $(\sqrt{7}, 0)$



28. ถ้า A และ B เป็นจุดที่วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดกับแกน y แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นระยะทางจาก A ไป B
- 1) $2\sqrt{3}$ 2) $4\sqrt{3}$ 3) 6 4) 8
29. สมการวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0, -5) และ (0, 5) จุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย คือข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$ 2) $25x^2 + 9y^2 = 225$
 3) $16x^2 + 25y^2 = 400$ 4) $25x^2 + 16y^2 = 400$
30. ข้อใดต่อไปนี้เป็น สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และรัศมีของวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา
- 1) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 2) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
 3) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 4) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
31. พิจารณาดสามเหลี่ยม ABC โดยที่เราทราบว่าด้าน AB เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $3x - y = 1$ ด้าน BC เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $x = 2$ และด้าน AC เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $y = 8$ อยากทราบว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด
32. สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x - 3y - 11 = 0$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 5y - 7 = 0$ คือข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $x - 3y + 1 = 0$ 2) $x - 3y - 1 = 0$ 3) $x - 3y + 7 = 0$ 4) $x - 3y - 7 = 0$
33. กำหนดให้สมการวงรีคือ $9x^2 + 4y^2 = 36$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด
- 1) ความยาวแกนเอก = 6 2) ความยาวแกนโท = 4
 3) โฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm\sqrt{13})$ 4) จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$
34. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ และมีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรีนี้มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 3) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 4) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
35. ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และตัดแกน x ที่จุด (4, 0) ตัดแกน y ที่จุด (0, -2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3 คือข้อใดต่อไปนี้เป็น
- 1) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ 2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$
 3) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 4) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

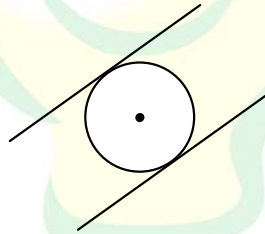


36. จากรูป



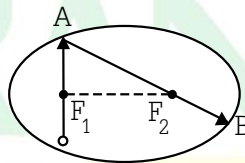
ส่วนของเส้นตรง \overline{AB} มีความชัน $\frac{1}{2}$
 ส่วนของเส้นตรง \overline{AC} ยาวกี่หน่วย

37. สมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, -2)$ และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย ถ้าเส้นสัมผัสมีความชันเป็น $\frac{1}{2}$ แล้ว สมการเส้นสัมผัส คือ เส้นตรงที่มีสมการเป็นอย่างไร



- 1) $x - 2y + 2 = 0$ และ $x - 2y - 8 = 0$ 2) $x - 2y - 2 = 0$ และ $x - 2y + 8 = 0$
 3) $x - 2y + 2 = 0$ และ $x - 2y + 8 = 0$ 4) $x - 2y - 2 = 0$ และ $x - 2y - 10 = 0$

38. โต้ะส่นุกเกอร์ทำเป็นรูปวงรีมีสมการเป็น $12x^2 + 16y^2 - 192 = 0$ ต้องวางลูกบิลเลียดในแนวตั้งฉากกับแกนหลัก ดังรูป

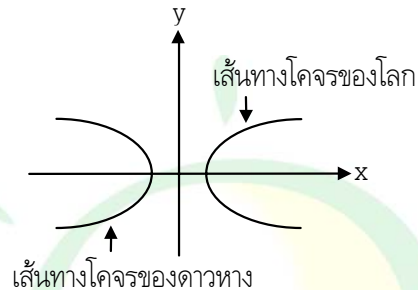


F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี ถ้าต้องวางลูกบิลเลียดไปตามแนวครซีโดยผ่านจุด F_1 กระทบขอบโต้ะที่จุด A และลูกบิลเลียดกระเด็นผ่านจุด F_2 ไปกระทบขอบโต้ะที่จุด B พิกัดของจุด B ตรงกับข้อใด

- 1) $(\frac{26}{7}, -\frac{9}{7})$ 2) $(\frac{9}{7}, -\frac{26}{7})$ 3) $(-2, 3)$ 4) $(2, 3)$

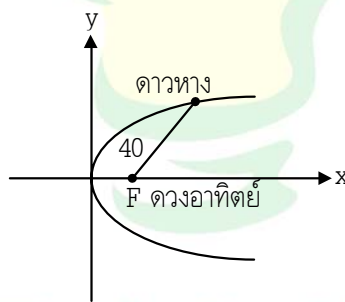


39. โลกและดาวหางโคจรเข้าหากัน โดยสมการที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีความยาวของแกนสังยุคเท่ากับ 8 ปีแสง โฟกัสทั้งสองห่างกัน 16 ปีแสง ระยะเวลาที่โลกและดาวหางโคจรใกล้กันที่สุดมีระยะเท่ากับข้อใด



- 1) $2\sqrt{3}$ ปีแสง 2) $4\sqrt{3}$ ปีแสง 3) $8\sqrt{3}$ ปีแสง 4) $16\sqrt{3}$ ปีแสง

40. ดาวหางดวงหนึ่งมีทิศทางของการเคลื่อนที่เป็นรูปพาราโบลา โดยมีดวงอาทิตย์เป็นโฟกัส ในขณะที่ดาวหางอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 40 ล้านไมล์ เส้นตรงที่ลากผ่านดวงอาทิตย์และดาวหางทำมุม 60 องศากับแกนของพาราโบลา ดังรูป จงหาระยะทาง (หน่วยเป็นล้านไมล์) ระหว่างดาวหางกับดวงอาทิตย์ ขณะที่ดาวหางโคจรอยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด



(หมายเหตุ : จุดบนพาราโบลาที่ใกล้โฟกัสมากที่สุดคือ จุดยอด)

เฉลย

1. 3) 2. 3) 3. 2) 4. 15 5. 4) 6. 4) 7. 4) 8. 7 9. 1) 10. 4)
 11. 2) 12. 2) 13. 1) 14. 3) 15. 1) 16. 2) 17. 3) 18. 4) 19. 3) 20. 2)
 21. 1) 22. 3) 23. 2) 24. 2) 25. 2) 26. $\frac{3}{4}$ 27. 2) 28. 2) 29. 3) 30. 4)
 31. 1) 32. 1) 33. 3) 34. 2) 35. 2) 36. 7.5 37. 1) 38. 1) 39. 3) 40. 10



7. กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังนี้

$$\text{ให้ } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x < 1 \\ x^3 + 2 & , x \geq 1 \end{cases} \text{ และ } g(x) = x^2 - x - 2$$

ถ้า $(f^{-1} \circ g \circ f)(-2) = a$ และ $(f^{-1} \circ f \circ g)(-2) = b$ แล้ว

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) $a = 4, b = 2$ 2) $a = 2, b = 2$ 3) $a = 4, b = 4$ 4) $a = 2, b = 4$

8. ถ้า $g(x) = 2x$ และ $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$ แล้ว ค่าของ $(g^{-1} \circ f)(10)$ เท่ากับเท่าใด

- 1) 12 2) 11 3) 10 4) 9

9. กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังนี้

$$f(2x - 1) = 4x - a, a > 0$$

$$\text{และ } g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$\text{ถ้า } (f \circ g)(a) = a^2 + 20$$

แล้ว $f(a)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 6 2) 7 3) 10 4) 17

10. กำหนดจุด $A(a, 5)$, $B(b, -1)$ โดยที่ความชันของ \overline{AB} เท่ากับ $-\frac{6}{7}$ ให้ C เป็นจุดกึ่งกลาง \overline{AB} และ C อยู่บนเส้นตรง $y = 4x$ สมการวงกลมที่มี \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางคือสมการในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 85$ 2) $4(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 85$
3) $(2x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 85$ 4) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = 85$

11. ให้ k เป็นระยะระหว่างจุดศูนย์กลางและโฟกัสของวงรี E ซึ่งมีสมการเป็น $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ถ้าไฮเพอร์โบล่า H มีโฟกัสที่จุดยอดของ E และความยาวแกนตามขวางเท่ากับ $2a$ ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$ โดยที่ $a > b$ และ $ab = 2k$ แล้วสมการของ H คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$ 2) $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$ 3) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ 4) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

12. กำหนดพาราโบลา P มีสมการ $x^2 = -12y$ ถ้าวงรีมีโฟกัสที่จุด $(-3\sqrt{3}, 0)$ และ $(3\sqrt{3}, 0)$ ผ่านจุดโฟกัสของ P และตัดเส้นตรง $x = 3\sqrt{3}$ ที่จุด A, B แล้ว \overline{AB} ยาวเท่ากับกี่หน่วย

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

13. กำหนด A, B เป็นเซตซึ่ง $n(A) = a, n(B) = b$ ถ้า $n[(A - B) \cup (B - A)] = 7$ และ $n(A \times B) = 40$ แล้ว $n(\{C \mid C \subseteq A \cup B \text{ และ } n(C) \leq 2\})$ เท่ากับเท่าใด

- 1) 56 2) 52 3) 50 4) 48

14. กำหนด $a > 0$ และ $f(x) = ax^2, x \geq 0; g(x) = x^3$ ถ้า $(f^{-1} \circ g)(4) = 2$ แล้ว $\frac{f^{-1}(64)}{g^{-1}(64)}$ มีค่าเท่าใด

- 1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{6}$



