เมทริกซ์(Matrix)

Computer Science, Burapha University

1. นิยามของเมทริกซ์

นิยามที่ 1 เมทริกซ์คือ กลุ่มของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน มาจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นแถวตามแนวนอน (Horizontal) และ แนวตั้ง (Vertical) ซึ่งมีแถวตามแนวนอนเรียกว่า *แถว (Row)* และตามแนวตั้งเรียกว่า *หลัก (Column)*

โดยทั่วไปนิยมใช้ในรูปต่อไปนี้แทน

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ใช้สัญลักษณ์ เป็น $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$ **หรือ** $A_{m\times n}$

เมทริกซ์ที่มี 1 แถวและ *n* หลัก เรียก *เมทริกซ์แถว* เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ที่มี *m* แถวและ 1 สดมภ์ เรียก *เมทริกซ์หลัก* เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก (*m*=*n*) หรือเรียกว่าเมทริกซ์อันดับ *n* มีรูปทั่วไปคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง *i*=*j* เรียก *เส้นทแยงมุมหลัก*

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix หรือ *Null Matrix)*

คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด เช่น

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทแยงมุม(Diagonal Matrix) **คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เชิงสเกล่าร์(Scalar Matrix) **คือเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด เช่น**

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix หรือ Unit Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 ทั้งหมด ใช้สัญลักษณ์ I หรือ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ขนาด ___2___ แถว

___4___ หลัก

เขียนด้วยสัญลักษณ์ ___$A_{2\times 4}$___

Ex. จงบอกประเภทและอันดับของเมทริกซ์ลักษณะพิเศษต่อไปนี้

1. $\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ศูนย์ อันดับ 2×3

2. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์หลักอันดับ 2×1

Ex. จงบอกประเภทและอันดับของเมทริกซ์ลักษณะพิเศษต่อไปนี้

3. $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์แถว

อันดับ 1×5

4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ทแยงมุม อันดับ 3

พีชคณิตของเมทริกซ์

การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equal Matrix)

ถ้า $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ และ $B = \left[b_{ij} \right]_{p \times q}$

จะได้ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $m = p$ และ $n = q$

และ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกค่าของ i และ j

Ex. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1.5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{0.25} \\ 1+0.5 & 3\times 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A = B$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{9} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A \neq B$

การบวกลบเมทริกซ์ (Matrix Addition or Subtraction)

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

แล้ว $A \pm B = C$

โดยที่ $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]_{m\times n}$

ซึ่งมีคุณสมบัติการบวกดังนี้

1. A+B = B+A (Commutative law)
2. A+(B+C) = (A+B)+C (Associative law)
3. A+(-A) = (-A)+A = 0 (Inverse law)
4. A+0 = A (Identity law)

Ex. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

จงหา $C = A + B$ และ $D = A - B$

วิธีทำ

$$C = \begin{bmatrix} -1+4 & 2+2 & 4-3 \\ 3+1 & -6+7 & 10+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1-4 & 2-2 & 4-(-3) \\ 3-1 & -6-7 & 10-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 2 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ (Scalar Multiplication)

ให้ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ และ k เป็นสเกลาร์ ดังนั้น $kA = \left[ka_{ij} \right]_{m \times n}$

นั่นคือ เป็นการนำ k คูณกับสมาชิกทุกตัวในเมตริกซ์

เช่น

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีคุณสมบัติการคูณสเกลาร์ดังนี้

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $(k + k')A = kA + k'A$
3. $(kk')A = k(k'A)$
4. $1A = A$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จงคำนวณหา $4A$, $-3A$

วิธีทำ $4A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(-5) & 4(3) \\ 4(4) & 4(1) & 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -20 & 12 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$-3A = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(-5) & -3(3) \\ -3(4) & -3(1) & -3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 15 & -9 \\ -12 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ *(Matrix Multiplication)*

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$

แล้ว $C = AB$ จะมีขนาดเท่ากับ $m \times p$

โดยที่ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

ซึ่งมีคุณสมบัติการคูณเมทริกซ์มีดังนี้

1. (AB)C = A(BC) (Associative law)
2. A(B+C) = AB+AC (Left Distributive law)
3. (B+C) A = BA+CA (Right Distributive law)
4. k(AB) = (kA)B = A(kB)

<u>Ex.</u> **จงหาผลคูณของเมทริกซ์ AB เมื่อ**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$AB=\begin{bmatrix}(1)(2)+(2)(4)+(3)(7) & (1)(0)+(2)(1)+(3)(3)\\ (0)(2)+(-1)(4)+(1)(7) & (0)(0)+(-1)(1)+(1)(3)\\ (5)(2)+(2)(4)+(-3)(7) & (5)(0)+(2)(1)+(-3)(3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}31 & 11\\ 3 & 2\\ -3 & -7\end{bmatrix}$$

ชนิดของเมทริกซ์

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transposed Matrix)

ถ้า $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ **แล้ว เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ** $\boldsymbol{A}$

คือ $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

ซึ่งเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Ex. จงหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)

คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีคุณสมบัติ $A = A^T$

เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew Symmetric Matrix)

คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีคุณสมบัติ $A = -A^T$

เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

<u>เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน</u> *(Upper Triangular Matrix)* คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่<u>ใต้</u>เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

<u>เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง</u> *(Lower Triangular Matrix)* คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่<u>เหนือ</u>เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Multiplication)

คือ เมทริกซ์จตุรัสที่ไม่สามารถหาเมทริกซ์อื่นมาคูณให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ได้

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-Singular Multiplication)

คือ เมทริกซ์จตุรัสที่สามารถหาเมทริกซ์อื่นมาคูณแล้วได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งจะเรียกว่า Invertible Matrix

เมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ จะเป็น Invertible Matrix ถ้ามีเมทริกซ์ B ขนาด $n \times n$ ที่มีคุณสมบัติว่า $AB = BA = I_n$ ซึ่งในกรณีนี้จะเรียกเมทริกซ์ B ว่าเป็น inverse ของ A แทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1}

คุณสมบัติของ *Invertible matrix* มีดังนี้

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ สำหรับจำนวนสเกลาร์ k ที่ไม่เท่ากับศูนย์
3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ดีเทอร์มิแนนท์(Determinant)ของเมทริกซ์

ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ คือ ค่าสเกลาร์ที่ได้จากเมทริกซ์จัตุรัสแทนด้วยสัญลักษณ์ det(A) หรือ $|A|$ ซึ่งวิธีคำนวณหาดีเทอร์มิแนนท์มีหลายวิธีดังนี้

การหาโดยตรง (ในกรณีของเมทริกซ์ขนาดเล็ก) เช่น

เมทริกซ์ขนาด 1×1 , $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

เมทริกซ์ขนาด 2×2 (หาดีเทอร์มิแนนท์ได้ในกรณีของเมทริกซ์จตุรัสเท่านั้น)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(A) = ad - cb$$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 3 × 3

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & + \end{array}$$

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

เมทริกซ์ที่มีขนาดมากกว่านี้จะทำวิธีนี้ไม่ได้ ต้องใช้วิธีกระจาย cofactor เท่านั้น

การหา Determinant โดยใช้วิธีการกระจาย Cofactor

- ไมเนอร์ (Minor) ของเมทริกซ์จัตุรัส A เมื่อขนาด $n \geq 2$ คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ A ซึ่งตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ออก โดยใช้สัญลักษณ์ M_{ij} แทน ไมเนอร์ของ a_{ij} เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

หาค่า M_{12} ต้องตัดแถวที่ 1 และ Column ที่ 2 ออก จะได้

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 9 & \cancel{4} & 6 \\ 5 & \cancel{3} & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 9(8) - 5(6) = 42$$

โคแฟคเตอร์(Cofactor) ของเมทริกซ์จัตุรัส A เมื่อขนาด $n \geq 2$ นิยามจากค่าไมเนอร์ ดังนี้

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

<u>ดังนั้น</u> ค่าของ C_{12} และ C_{23} หาได้ดังนี้

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1(42) = -42$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(1) = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1(1) = -1$$

การกระจาย Cofactor สามารถเลือกว่าจะใช้แถวหรือ หลัก ใดก็ได้
แต่การคำนวณจะง่ายขึ้นถ้าเลือกแถวหรือ หลัก ที่มีสมาชิกเป็น 0 อยู่มาก

จากค่าไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ จะหาค่า det(A) ได้จาก

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

จากตัวอย่างจะได้ว่า

$det(A) = a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$

$= 2C_{11}+1C_{12}+0C_{13}$

$= 2(14) +1(-42) + 0 = 28-42 = -14$

คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

- $\det(AB) = \det(BA) = (\det A)(\det B)$
- $\det A = \det A^T$
- ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่เป็นสามเหลี่ยมบนหรือสามเหลี่ยมล่างจะเท่ากับผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก
- ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างขึ้นจากเมทริกซ์ A โดยการสลับ 2 แถวหรือ 2 คอลัมภ์ใดๆ ค่า $\det A = -\det B$
- ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างขึ้นจากเมทริกซ์ A โดยการคูณสมาชิกทุกตัวของแถวหรือคอลัมภ์ของ A ด้วยสเกลาร์ แล้ว $\det A = (1/k)\det B$
- ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างขึ้นจากเมทริกซ์ A โดยการนำค่าคงที่คูณแถวหรือคอมลัมภ์หนึ่งแล้วบวกกับอีกแถวหรือคอลัมภ์หนึ่งแล้ว $\det A = (1/k)\det B$
- ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือคอลัมภ์ใดคอลัมภ์หนึ่งเป็นศูนย์หมด ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้นจะเท่ากับ 0
- ถ้าสองแถวใดๆ ในเมทริกซ์เหมือนกัน ดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับ 0
- ถ้าเมทริกซ์ A มี inverse, $\det A^{-1} = 1/\det A$
- $\det(I_n) = 1$

Inverse Matrix

เมทริกซ์ B จะเป็น Inverse ของเมทริกซ์ A ถ้า AB = BA = I

เช่น $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

การหา Inverses matrix ขนาด 2x2

$$A \times A^{-1} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

ให้ $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\mathbf{AA^{-1} = I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

คูณเมทริกซ์เข้าด้วยกัน จะได้

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8a - 10c & 8b - 10d \\ -3a + 4c & -3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8a - 10c = 1 \qquad 8b - 10d = 0$$

$$-3a + 4c = 0 \qquad -3b + 4d = 1$$

<u>จงแก้สมการหาค่า **A^{-1}?**</u>

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1.5 & 4 \end{bmatrix}$$

การหาอินเวอร์สเมทริกซ์โดยอาศัยเมทริกซ์ผูกพัน(Adjoint matrix)

หาแอดจอยด์เมทริกซ์ (Adjoint Matrix)

$$\text{Adj } A = [\text{Cof } A]^T$$

ถ้า A เป็น non-singular matrix (det A $\neq$ 0)

จะหาอินเวอร์สได้โดย

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A$$

คุณสมบัติของ Adjoint matrix

1.เมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ใด ๆ จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

2.ให้ *A* และ *B* เป็น Nonsingular matrix แล้ว

2.1. $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$

2.2. $adj(AB) = (adjB)(adjA)$

การหา Inverses matrix ขนาด 2x2

หรือสามารถหา **inverse matrix** ได้โดย

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ad-bc แทน det(A) ซึ่งหากมีค่าเท่ากับศูนย์ เมทริกซ์ A จะหา inverse ไม่ได้

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{-b} \\ \mathbf{-c} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ:

- จากเมทริกซ์ A ที่กำหนด
- สลับค่า a และ d
- เปลี่ยนเครื่องหมายของ b และ c
- คูณเมทริกซ์ที่ได้เข้ากับ 1/ det(A)

การหา Inverses matrix ขนาด 2x2

Example: จงหา inverse ของ A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2)(-10)-(-4)(4)} \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

การหา Inverses matrix ขนาด 2x2

Find the inverses of A, B and C, where

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} \\ 20 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -19 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},\ B^{-1} \text{ does not exist, } C^{-1} = \frac{1}{3a+4}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

การหาอินเวิร์สเมทริกซ์โดยอาศัยการแปลงตามแนวแถว

- ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ การแปลงตามแนวแถว คือการแปลงเมทริกซ์จากรูปแบบ $[A|I_n]$ ให้อยู่ในรูป $[I_n|A^{-1}]$ โดยใช้หลักการแปลงดังนี้
  - สลับแถวของ 2 แถวใดๆ
  - คูณสเกลาร์เข้าไปในสมาชิกของทั้งแถว
  - บวกหรือลบสมาชิกแต่ละตัวของแถวกับอีกแถวหนึ่ง